ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ Τάξης

Γενικού Λυκείου

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Β΄ ΜΕΡΟΣ

Τόμος 4ος

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ
ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός
• Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών

Κατσαργύρης Βασίλειος
• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

Μέτης Στέφανος
• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

Μπρουχούτας Κωνσταντίνος
• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

Παπασταυρίδης Σταύρος
• Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών

Πολύζος Γεώργιος
• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ
Θωμαΐδης Ιωάννης
• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΟΜΑΔΑ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ
Ανδρεαδάκης Στυλιανός,
Κατσαργύρης Βασίλειος
Μέτης Στέφανος,
Μπρουχούτας Κων/νος
Πολύζος Γεώργιος

ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΥ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟΥ
Αδαμόπουλος Λεωνίδας
• Επίτιμος Σύμβουλος του Π.Ι.

Δακτυλογράφηση: Γαρδέρη Ρόζα
Σχήματα: Μπούτσικας Μιχάλης

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Η αξιολόγηση, η κρίση των προσαρμογών και η επιστημονική επιμέλεια του προσαρμοσμένου βιβλίου πραγματοποιείται από τη Μονάδα Ειδικής Αγωγής του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Η προσαρμογή του βιβλίου για μαθητές με μειωμένη όραση από το ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ πραγματοποιείται με βάση τις προδιαγραφές που έχουν αναπτυχθεί από ειδικούς εμπειρογνώμονες για το ΙΕΠ.

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ

ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ Τάξης

Γενικού Λυκείου

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Β΄ ΜΕΡΟΣ

Τόμος 4ος

Ανδρεαδάκης Στυλιανός

Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Κατσαργύρης Βασίλειος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Μέτης Στέφανος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Μπρουχούτας Κων/νος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Παπασταυρίδης Σταύρος
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Πολύζος Γεώργιος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

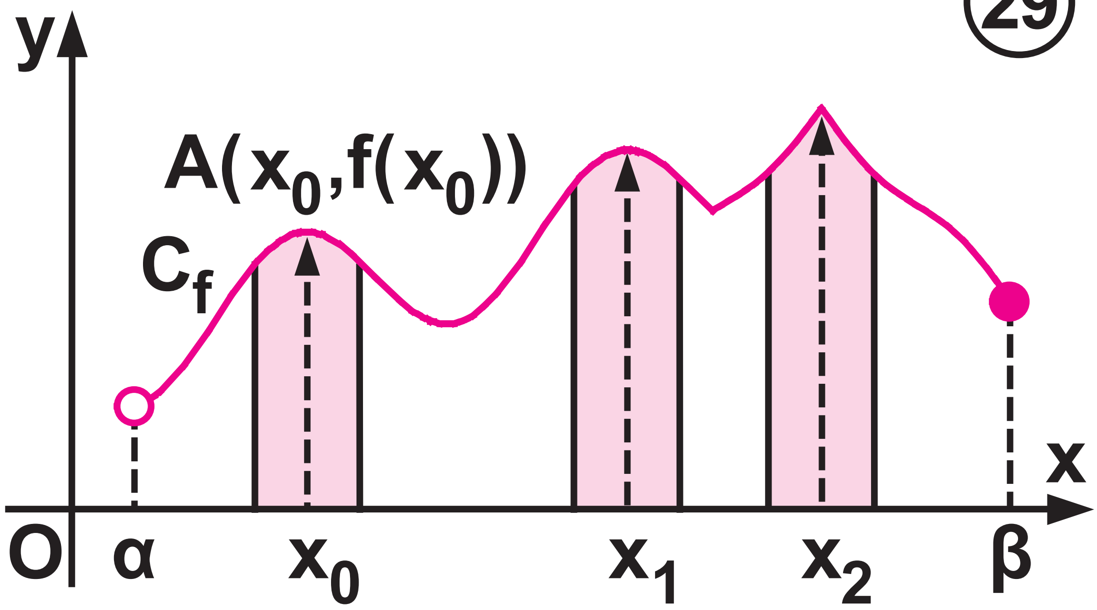
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

2.7 ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η έννοια του τοπικού ακροτάτου

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα (α, β].

Παρατηρούμε ότι στο σημείο $x = x_0$ η τιμή της συνάρτησης είναι μεγαλύτερη από την τιμή της σε κάθε "γειτονικό" σημείο του x_0. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Το ίδιο συμβαίνει και στα σημεία x_1 και x_2. Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:



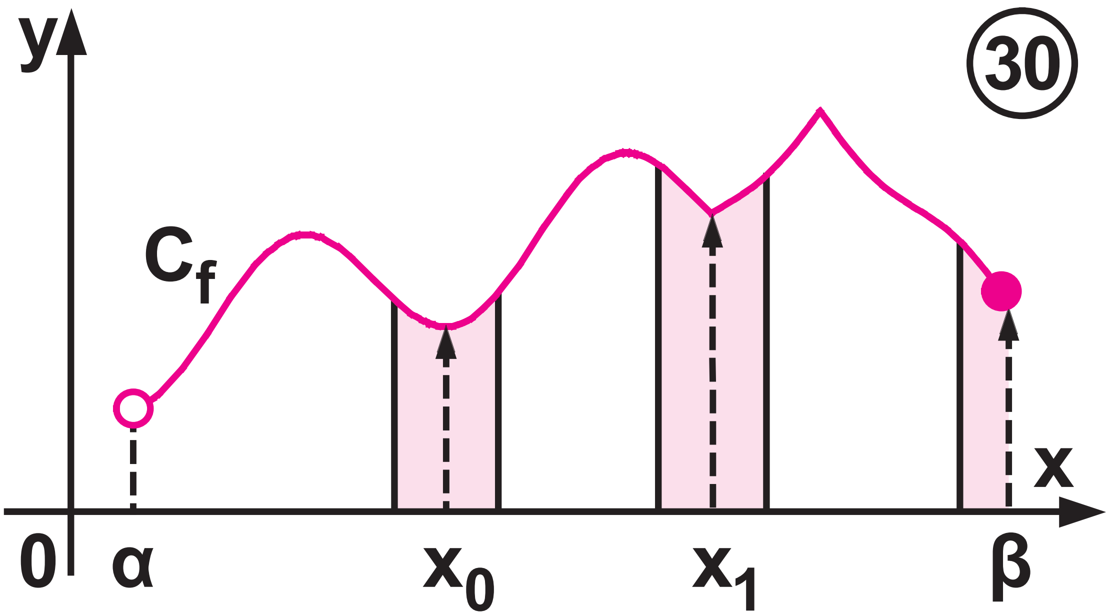
ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f.

Αν η ανισότητα $f(x) \leq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.3, η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό μέγιστο** ή απλά **μέγιστο**, το $f(x_0)$.



Στο παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι στο σημείο $x = x_0$ η τιμή της συνάρτησης είναι μικρότερη από την τιμή της σε κάθε “γειτονικό” σημείο του x_0. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f παρουσιάζει στο

x_0 τοπικό ελάχιστο. Το ίδιο συμβαίνει και στα σημεία x_1 και β. Γενικά, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το x_0 λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της f.**

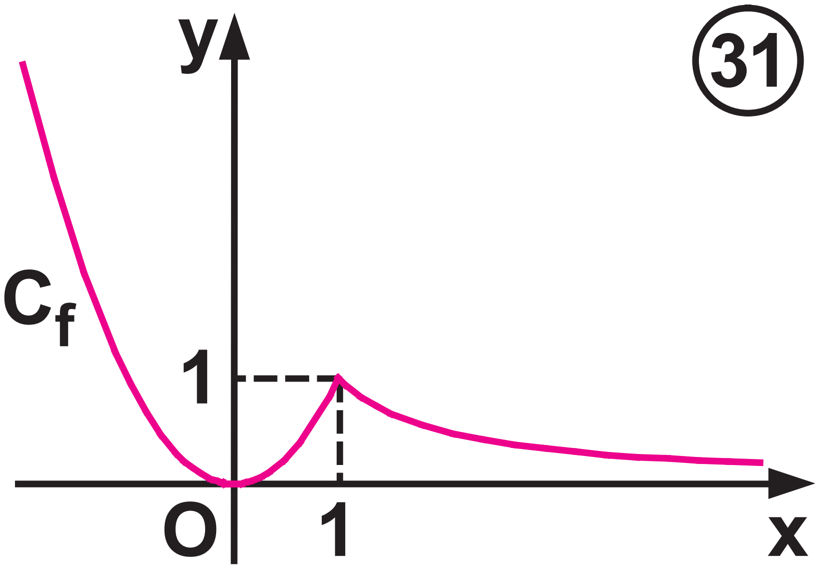
Αν η ανισότητα $f(x) \geq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.3, η f παρουσιάζει στο

$x_0 \in A$ **ολικό ελάχιστο** ή απλά **ελάχιστο**, το $f(x_0)$.

Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται **τοπικά ακρότατα** ή, απλά, **ακρότατα** αυτής, ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται **θέσεις τοπικών ακροτάτων**. Το μέγιστο και το ελάχιστο της f λέγονται **ολικά ακρότατα** αυτής.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad \text{αν} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & , \quad \text{αν} \quad x > 1 \end{cases}$$



παρουσιάζει:

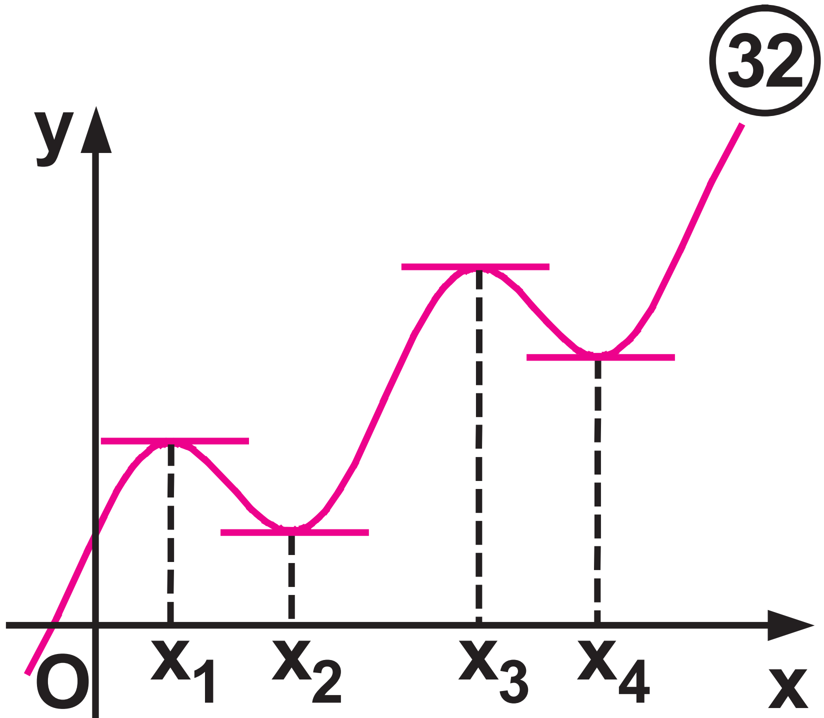
i) **στο $x = 0$ τοπικό ελάχιστο, το $f(0) = 0$, το οποίο είναι και ολικό ελάχιστο και**

ii) **στο $x = 1$ τοπικό μέγιστο, το $f(1) = 1$.**

Η συνάρτηση f αν και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, εντούτοις δεν παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο.

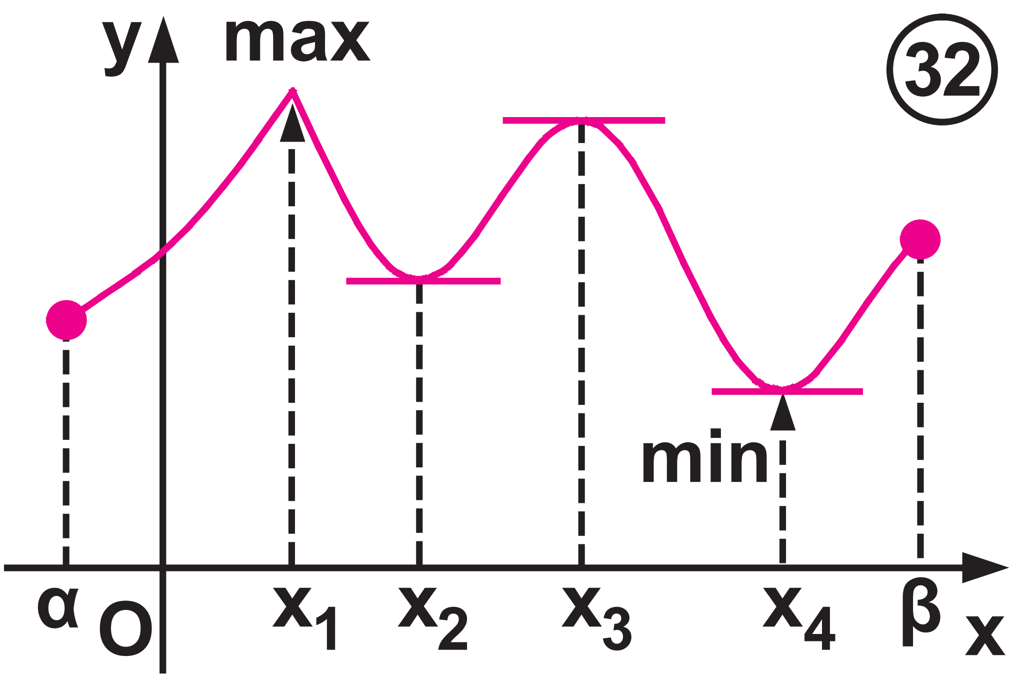
ΣΧΟΛΙΑ

i) Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο (Σχ.32α).



(α)

ii) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει, ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα. (Σχ. 32β).



(β)

Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης (Σχ. 32α).

Προσδιορισμός των τοπικών ακροτάτων

Με μια προσεκτική παρατήρηση του σχήματος 32β βλέπουμε ότι αν σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και επιπλέον είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι οριζόντια, δηλαδή ισχύει $f'(x_0) = 0$. Αυτό επιβεβαιώνεται από το παρακάτω θεώρημα, που είναι γνωστό ως **Θεώρημα του Fermat**.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ’ ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0)=0$$

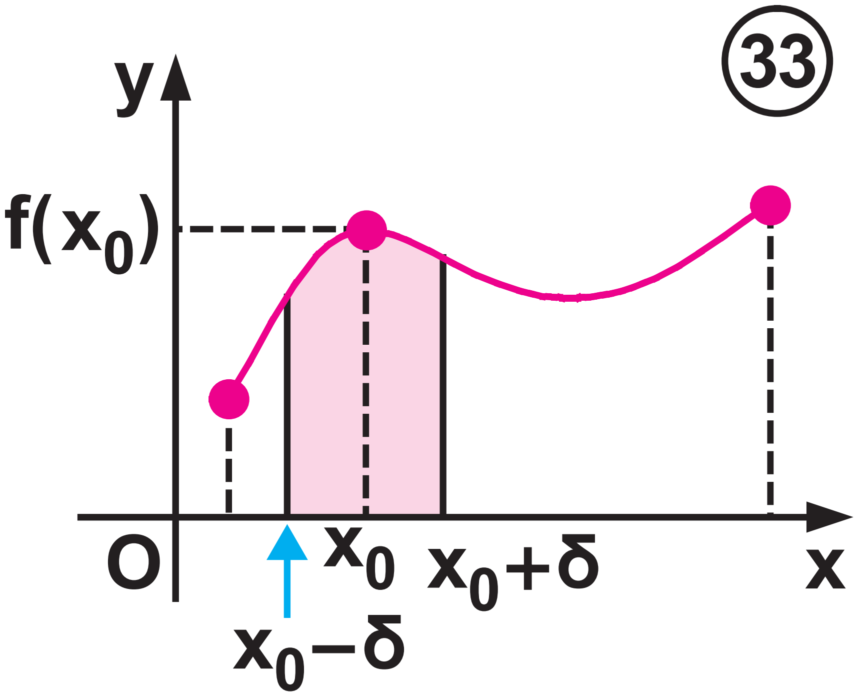
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ’ αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε

$$(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq \Delta \text{ και}$$

$$f(x)\le f(x_0), \text{ για κάθε}$$

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \qquad (1)$$



Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$.
Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ■

ΣΧΟΛΙΟ

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων. Επομένως, όπως φαίνεται και στα σχήματα 29 και 30, οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ **είναι:**

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.

2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.

3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της)**.**

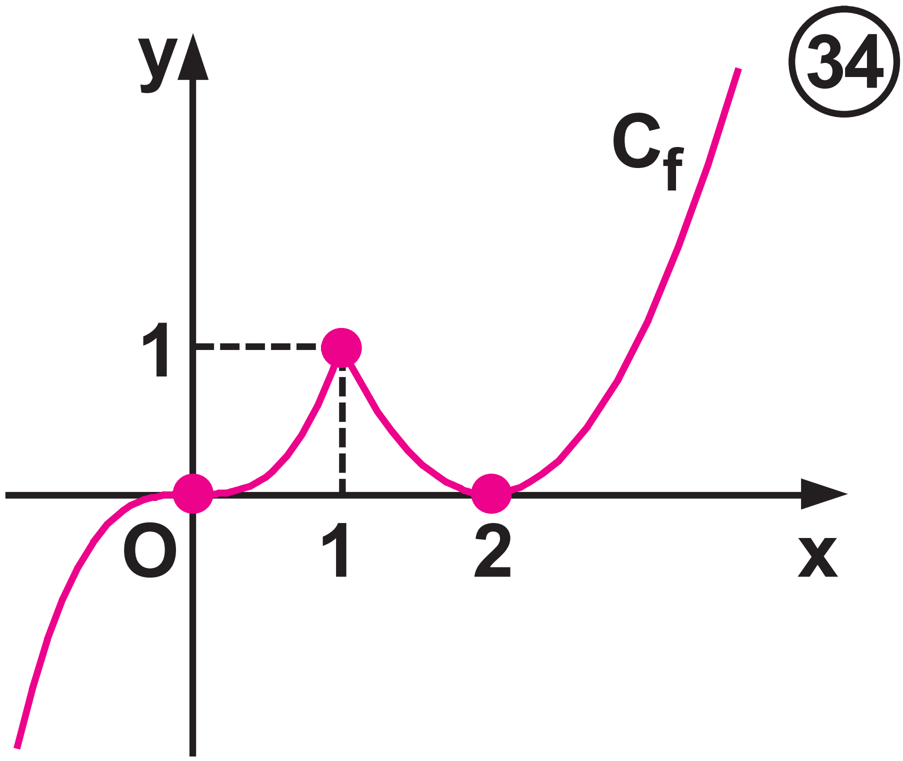
Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ.
Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & , \quad x<1 \\ (x-2)^2 & , \quad x\geq 1 \end{cases}.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ εκτός από το 1, με:

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & , \quad x<1 \\ 2(x-2) & , \quad x>1 \end{cases}.$$

Οι ρίζες της $f'(x)=0$ είναι οι 0 και 2.



Επειδή η f′ μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι αριθμοί 0, 1 και 2. Όμως, όπως φαίνεται στο σχήμα, τα σημεία 1 και 2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων, ενώ το σημείο 0 δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου. Άρα δεν είναι όλα τα κρίσιμα σημεία θέσεις τοπικών ακροτάτων της f. Επομένως,

χρειαζόμαστε ένα κριτήριο το οποίο να μας πληροφορεί ποια από τα κρίσιμα σημεία της f είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων αυτής. Σχετικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. (Σχ. 35α)

ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f. (Σχ. 35β)

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β). (Σχ. 35γ).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε

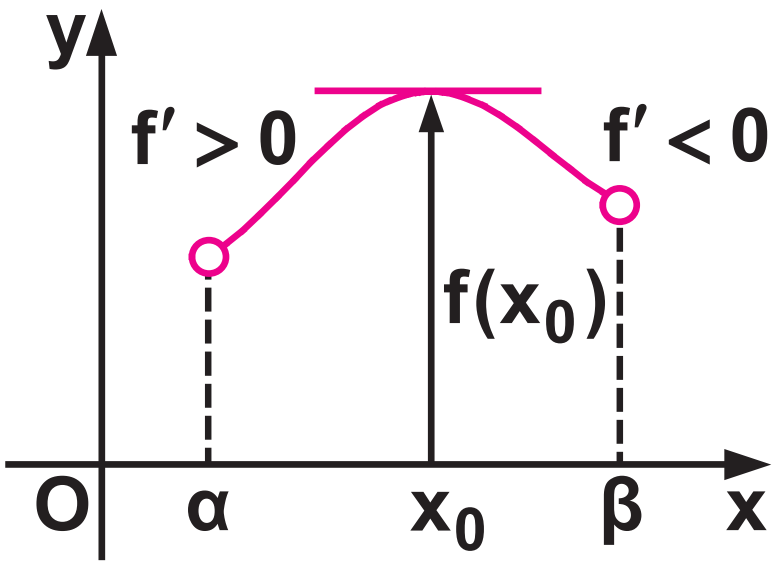
$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0]. \quad (1)$$

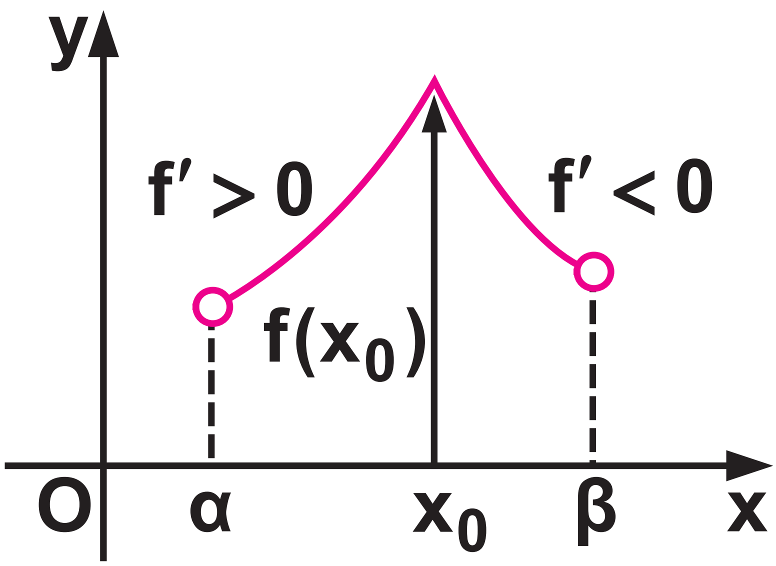
Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$.

Έτσι έχουμε:

$f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in [x_0, \beta)$. (2)

35α





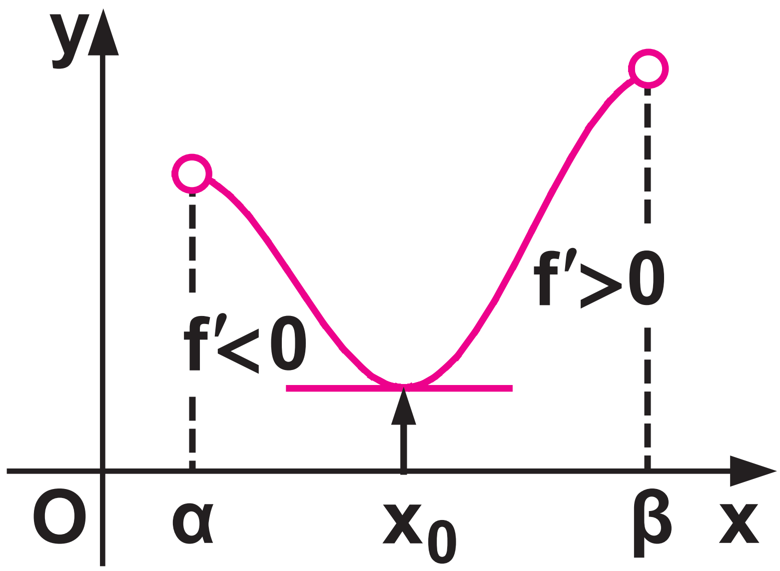
Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

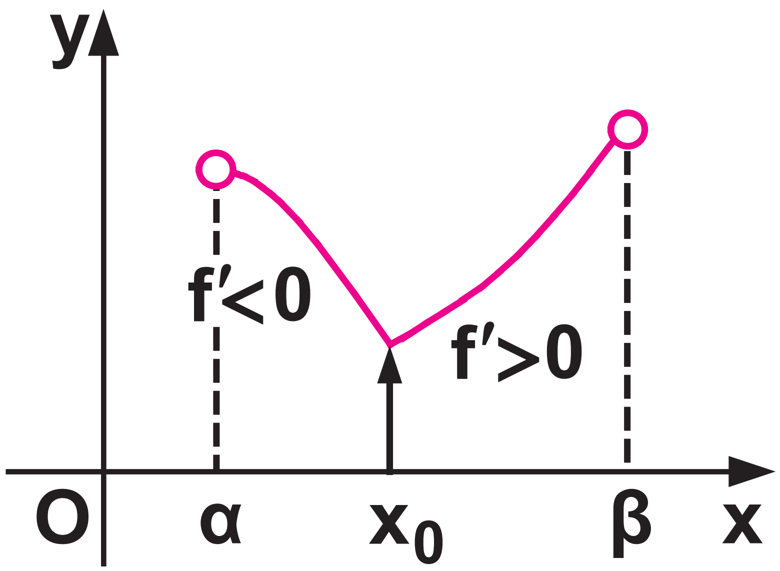
$$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

35β

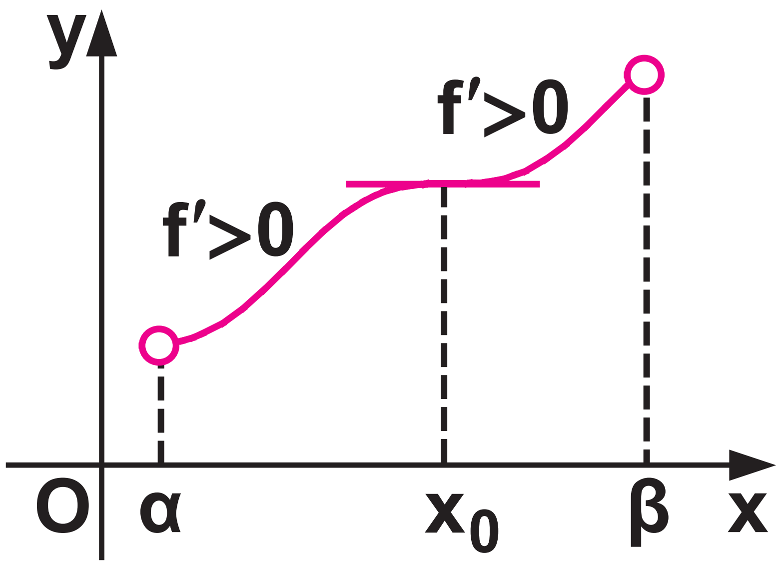


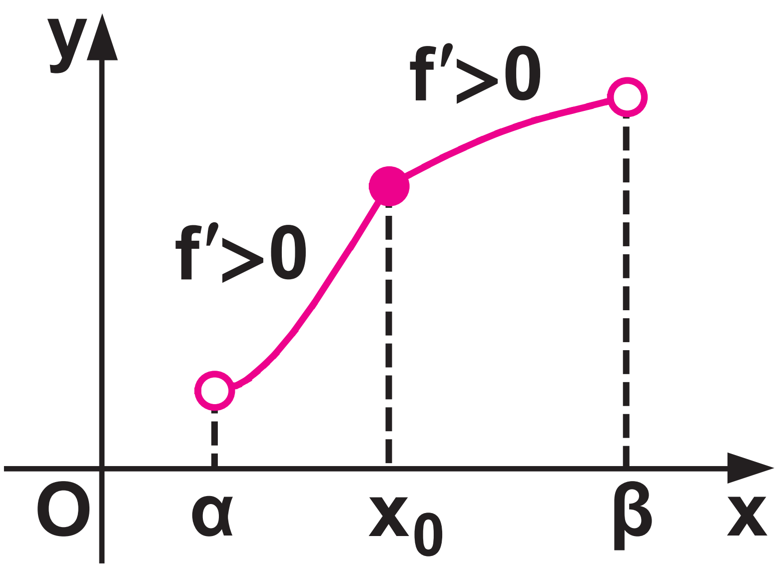


23 / 144 - 145

iii) Έστω ότι
$f'(x) > 0$, για κάθε
$x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

35γ





Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(α, x_0]$ και $[x_0, β)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (α, β)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (α, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(α, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, β)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, β)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. ■

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3$ που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$. Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι $x = 0$ (διπλή) ή $x = 3$, το δε πρόσημο της f' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$ και παρουσιάζει ένα μόνο τοπικό ακρότατο, συγκεκριμένα ολικό ελάχιστο για $x = 3$, το $f(3) = -27$.

ΣΧΟΛΙΑ

- **Όπως είδαμε στην απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος στην πρώτη περίπτωση το $f(x_0)$ είναι η μέγιστη τιμή της f στο (α, β), ενώ στη δεύτερη περίπτωση το $f(x_0)$ είναι η ελάχιστη τιμή της f στο (α, β).**

- **Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα [α, β], όπως γνωρίζουμε (Θεώρημα § 1.8),** η f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο. Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου εργαζόμαστε ως εξής:

1. **Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f.**

2. **Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.**

3. **Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της f.**

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 19$, $x \in [0,5]$. Έχουμε $f'(x) = 6x^2 - 30x + 24$, $x \in [0,5]$. Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι οι $x = 1$, $x = 4$. Επομένως, τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα $x = 1$, $x = 4$. Οι τιμές της f στα κρίσιμα σημεία και στα άκρα του διαστήματος $[0, 5]$ είναι

$$f(1) = 30,\ \ f(4) = 3,\ \ f(0) = 19 \ \text{ και } \ f(5) = 14.$$

Άρα, η μέγιστη τιμή της f στο $[0, 5]$ είναι ίση με 30 και παρουσιάζεται για $x = 1$, ενώ η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με 3 και παρουσιάζεται για $x = 4$.

● Για να εφαρμόσουμε το προηγούμενο θεώρημα απαιτείται να προσδιορίσουμε το πρόσημο της f' εκατέρωθεν του x_0. Όταν ο προσδιορισμός αυτός δεν είναι εύκολος ή είναι αδύνατος, τότε το παρακάτω θεώρημα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται, μπορεί να μας πληροφορήσει αν το x_0 είναι θέση τοπικού ακρότατου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) και x_0 ένα σημείο του (α, β) στο οποίο η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη.

- Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο.
- Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να βρούμε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = x + 2\sigma\upsilon\nu x,\ x \in (0, 2\pi).$$

Έχουμε

$$f'(x) = 1 - 2\eta\mu x \text{ και } f''(x) = -2\sigma\upsilon\nu x,$$

οπότε οι ρίζες της f' είναι οι $\frac{\pi}{6}$ και $\frac{5\pi}{6}$.

Για $x = \frac{\pi}{6}$, είναι $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} < 0$,

ενώ για $x = \frac{5\pi}{6}$, είναι $f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{3} > 0$.

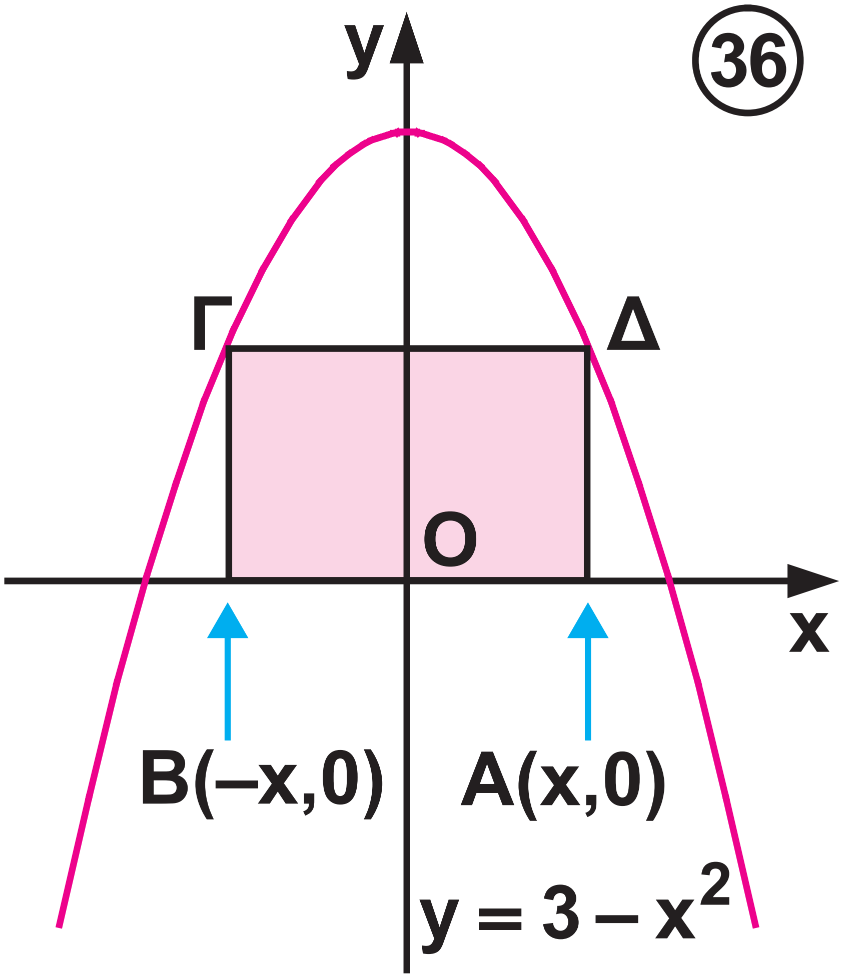
Έτσι έχουμε

α) $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ και $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0$, οπότε το $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

β) $f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 0$ και $f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) > 0$, οπότε το $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί το $x \in [0, \sqrt{3}]$ έτσι, ώστε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος να έχει μέγιστο εμβαδό.



ΛΥΣΗ

Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι

$E(x) = (AB)(A\Delta) = 2x(3 - x^2) =$
$= -2x^3 + 6x.$

Έχουμε $E'(x) = -6x^2 + 6 = -6(x + 1)(x - 1)$. Οι ρίζες της $E'(x) = 0$ είναι οι $x = -1$, $x = 1$. Η μονοτονία και τα ακρότατα της Ε φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

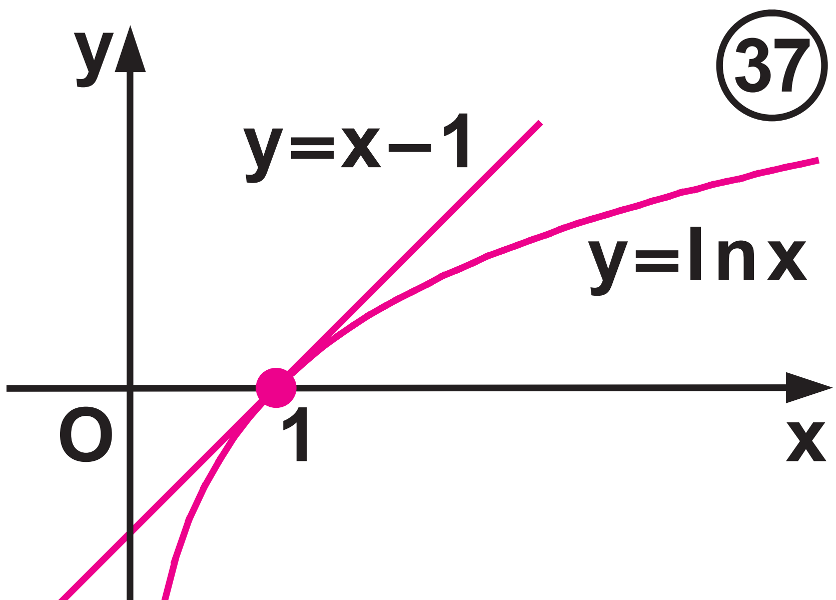
x	0		1		$\sqrt{3}$
$E'(x)$		$+$	0	$-$	
$E(x)$	0 min	$\nearrow$	4 max	$\searrow$	0 min

Άρα, η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι ίση με 4 και παρουσιάζεται όταν $x = 1$.

2. **Έστω η συνάρτηση $f(x) = x - 1 - \ln x$.**

i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να αποδειχτεί ότι $\ln x \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$.



ΛΥΣΗ

i) Έχουμε $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$,

$x \in (0,+\infty)$. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα, την $x = 1$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0 min	$\nearrow$	

ii) Επειδή η f για $x = 1$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει:

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow x - 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x \leq x - 1.$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 1$.

3. Μία βιομηχανία καθορίζει την τιμή πώλησης Π(x), σε ευρώ, κάθε μονάδας ενός προϊόντος, συναρτήσει του πλήθους x των μονάδων παραγωγής, σύμφωνα με τον τύπο $\Pi(x) = 40000 - 6x$. Το κόστος παραγωγής μιας μονάδας είναι 4000 ευρώ. Αν η βιομηχανία πληρώνει φόρο 1200 ευρώ για κάθε μονάδα προϊόντος, να βρεθεί πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να παράγει η βιομηχανία, ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος.

ΛΥΣΗ

Η είσπραξη από την πώληση x μονάδων παραγωγής είναι

$$E(x) = x\Pi(x) = x(40000 - 6x) = -6x^2 + \\ + 40000x.$$

Το κόστος από την παραγωγή x μονάδων είναι

$$K(x) = 4000x.$$

Το ολικό κόστος μετά την πληρωμή του φόρου είναι:

$$K_{o\lambda}(x) = 4000x + 1200x = 5200x.$$

Επομένως, το κέρδος της βιομηχανίας είναι

$$P(x) = E(x) - K_{ολ}(x) =$$
$$= -6x^2 + 40000x - 5200x =$$
$$= -6x^2 + 34800x.$$

Έχουμε $P'(x) = -12x + 34800$, οπότε η $P'(x) = 0$ έχει ρίζα την $x = 2900$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της P στο $(0,+\infty)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		2900		$+\infty$
$P'(x)$		+	0	−	
$P(x)$		↗	50460 max	↘	

Επομένως, το μέγιστο κέρδος παρουσιάζεται όταν η βιομηχανία παράγει 2900 μονάδες από το προϊόν

αυτό και είναι ίσο με 50460 χιλιάδες ευρώ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. **Η παράγωγος μιας συνάρτησης f είναι**

$$f'(x) = 3(x-1)^3(x-2)^2(x-3).$$

Για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και για ποιες παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο;

2. α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

ii) $g(x) = x^3 - 3x + 2$

iii) $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$

β) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών των εξισώσεων:

$x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0,$

$x^3 - 3x + 2 = 0,$

$2x^3 - 3x^2 - 1 = 0.$

3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x \le 1 \\ e^{1-x} & , \quad x > 1 \end{cases}$

ii) $g(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & , \quad x < 1 \\ x^2-4x+3 & , \quad x \ge 1 \end{cases}.$

4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=e^x-x$

ii) $f(x)=x^x,\ x>0.$

5. **Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 1$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$. Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων.**

6. **Να αποδείξετε ότι, από όλα τα οικόπεδα σχήματος ορθογωνίου με εμβαδό 400 m^2, το τετράγωνο χρειάζεται τη μικρότερη περίφραξη.**

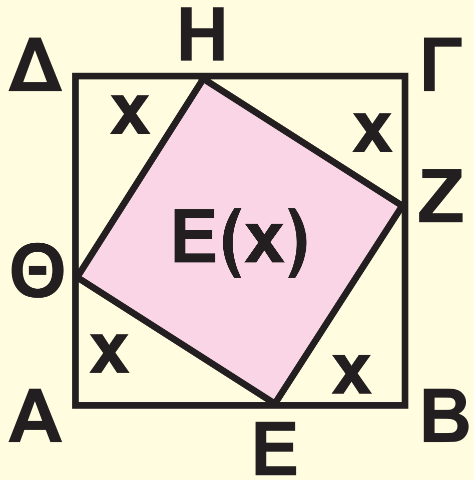
7. **Με συρματόπλεγμα μήκους 80 m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου. Να βρείτε τις διαστάσεις**

του οικοπέδου που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

8. Μία ώρα μετά τη λήψη x mgr ενός αντιπυρετικού, η μείωση της θερμοκρασίας ενός ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $T(x) = x^2 - \frac{x^3}{4}$, $0 < x < 3$. Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η δόση του αντιπυρετικού, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της θερμοκρασίας ως προς x, να γίνει μέγιστος.

9. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος με πλευρά 2 cm. Αν το τετράγωνο

ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ,



i) να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x.

ii) να βρείτε το x έτσι, ώστε το εμβαδόν Ε(x) του ΕΖΗΘ να γίνει ελάχιστο.

10. Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός

βιομηχανικού προϊόντος είναι

$$K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000$$

ευρώ, για $0 \leq x \leq 105$, ενώ η είσπραξη από την πώληση των x μονάδων είναι $E(x) = 420x - 2x^2$ ευρώ. Να βρεθεί η ημερήσια παραγωγή του εργοστασίου, για την οποία το κέρδος γίνεται μέγιστο.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2ημx - x + 3,\ x \in [0, π]$

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και ακρότατα.

ii) **Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $ημx = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, π)$.**

2. i) **Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση**

$$f(x) = \ln x + x - 1$$

και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

ii) **Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση**

$$φ(x) = 2x\ln x + x^2 - 4x + 3$$

iii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = x\ln x \text{ και } h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

i) α) $e^x > 1 + x$

β) $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

ii) α) $\sigma\upsilon\nu x > 1 - \frac{1}{2}x^2$

β) $ημx > x - \frac{1}{6}x^3$

iii) α) $(1 + x)^ν > 1 + νx$, $ν \in \mathbb{N}$ με $ν \geq 2$

β) $(1+x)^ν > 1 + νx + \frac{ν(ν-1)}{2}x^2$, $ν \in \mathbb{N}$ με $ν \geq 3$.

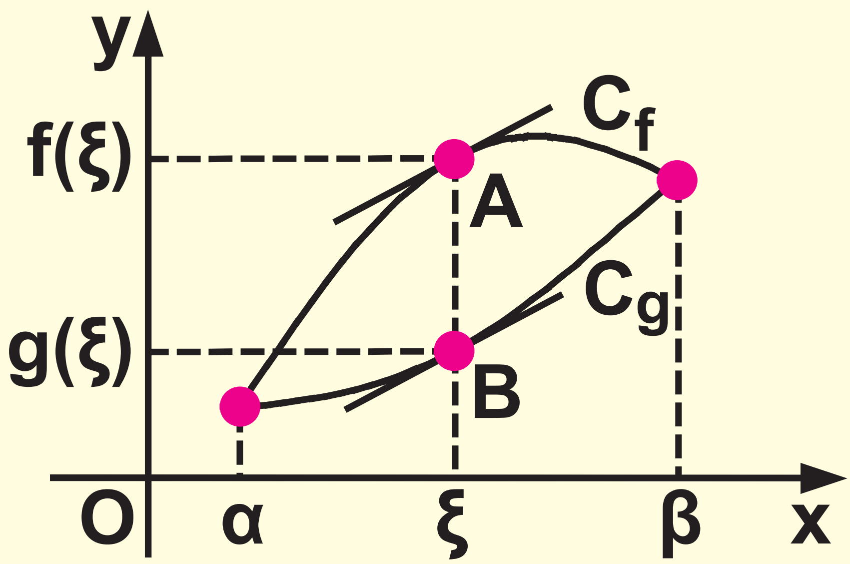
4. Να αποδείξετε ότι, αν για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ισχύει

$$2f^3(x) + 6f(x) = 2x^3 + 6x + 1,$$

τότε η f δεν έχει ακρότατα.

5. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε

τις γραφικές παραστάσεις δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g σ' ένα διάστημα [α, β]. Το σημείο $\xi \in (\alpha, \beta)$ είναι το σημείο στο οποίο η κατακόρυφη απόσταση (AB) μεταξύ των C_f και C_g παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στα σημεία A(ξ, f(ξ)) και B(ξ, g(ξ)) είναι παράλληλες.



6. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = (x - \alpha)^2(x - \beta)^2(x - \gamma)^2,$$
$$\text{με } \alpha < \beta < \gamma$$

έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

7. Με ένα σύρμα μήκους 4 m κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς x m και ένα τετράγωνο πλευράς y m.

   i) Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων συναρτήσει της πλευράς x του ισοπλεύρου τριγώνου.

   ii) Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο.

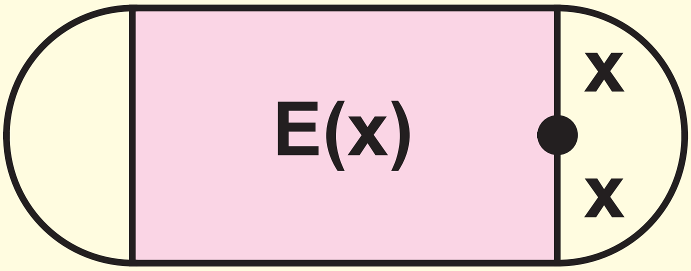
8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ και το σημείο $A\left(\frac{9}{2},0\right)$.

i) Να βρείτε το σημείο Μ της C_f που απέχει από το σημείο Α τη μικρότερη απόσταση.

ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι κάθετη στην ΑΜ.

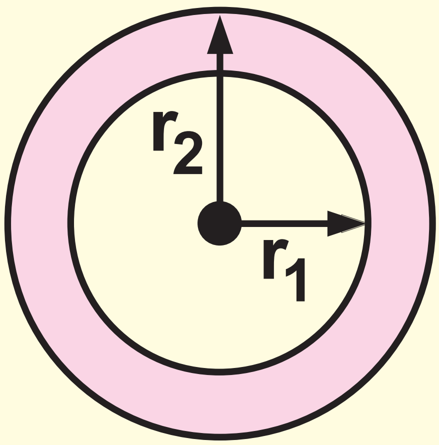
9. Όπως γνωρίζουμε, ο στίβος του κλασικού αθλητισμού αποτελείται από ένα ορθογώνιο και δύο ημικύκλια. Αν η περίμετρος του στίβου είναι 400 m, να βρείτε τις διαστάσεις

του, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου μέρους να γίνει μέγιστο.



10. Η ναύλωση μιας κρουαζιέρας απαιτεί συμμετοχή τουλάχιστον 100 ατόμων. Αν δηλώνουν ακριβώς 100 άτομα, το αντίτιμο ανέρχεται σε 1000 ευρώ το άτομο. Για κάθε επιπλέον άτομο το αντίτιμο ανά άτομο μειώνεται κατά 5 ευρώ. Πόσα άτομα πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή, ώστε να έχουμε τα περισσότερα έσοδα;

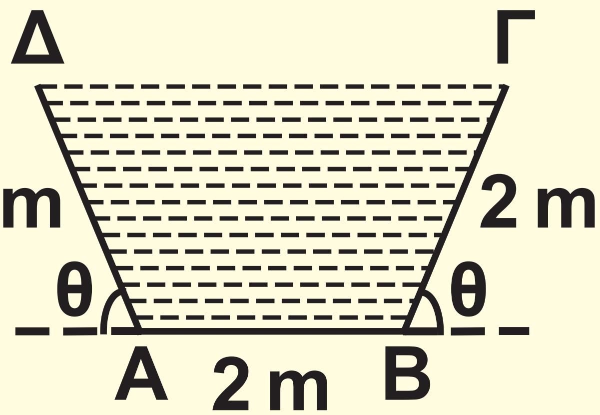
11. Έστω Ε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου του παρακάτω σχήματος. Υποθέτουμε οτι τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $r_1 = 3$ cm και $r_2 = 5$ cm και ότι για $t > 0$ η ακτίνα r_1 αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,05 cm/s, ενώ η ακτίνα r_2 αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,04 cm/s. Να βρείτε:



i) πότε θα μηδενιστεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου και

ii) πότε θα μεγιστοποιηθεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου.

12. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κανάλι του οποίου η κάθετη διατομή ΑΒΓΔ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



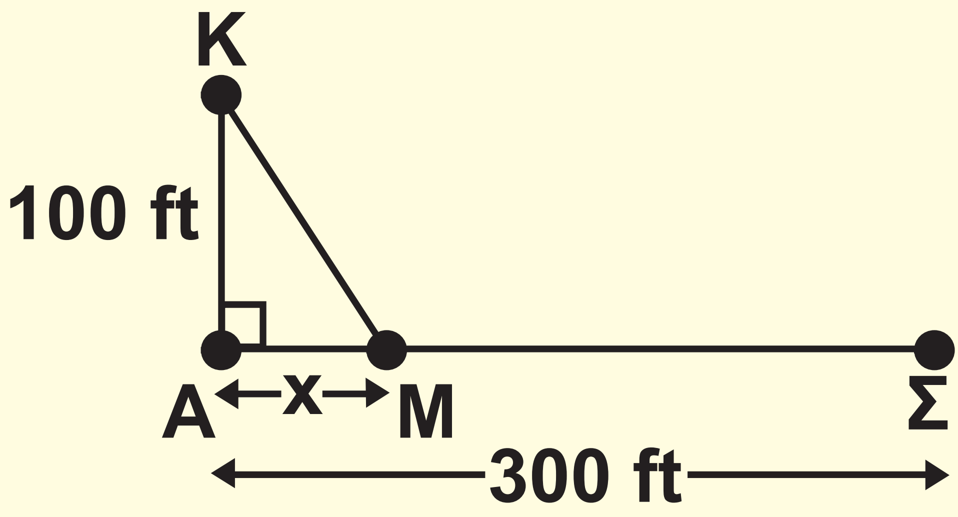
i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της διατομής ΑΒΓΔ είναι ίσο με Ε = 4ημθ(1 + + συνθ)

ii) Για ποια τιμή του θ το εμβαδόν της κάθετης διατομής μεγιστοποιείται;

13. Ένας κολυμβητής Κ βρίσκεται στη θάλασσα 100 ft[1] μακριά από το πλησιέστερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του Σ βρίσκεται 300 ft μακρυά από το σημείο Α. Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμβήσει με ταχύτητα 3 ft/s και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα 5 ft/s.

---

(1) 1 ft = 30,48cm

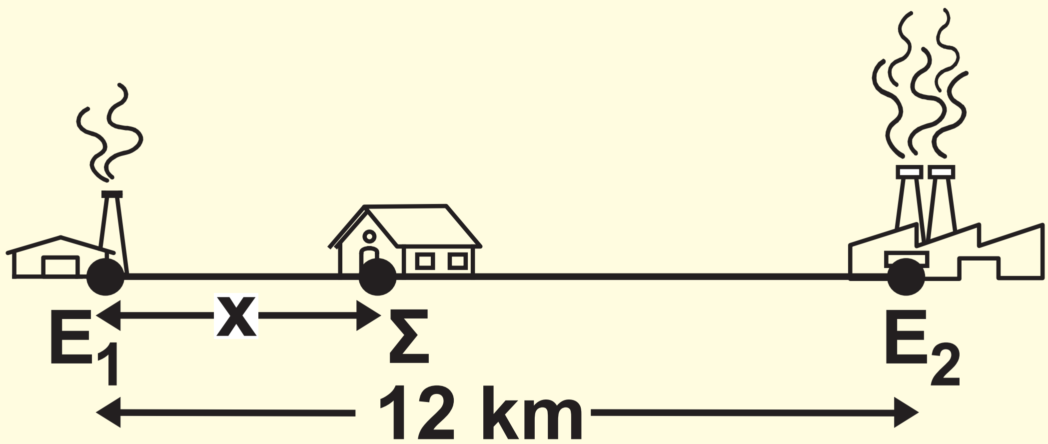


i) Να αποδείξετε οτι για να διανύσει τη διαδρομή ΚΜΣ του παραπάνω σχήματος χρειάζεται χρόνο

$$T(x) = \frac{\sqrt{100^2 + x^2}}{3} + \frac{300 - x}{5}.$$

ii) Για ποια τιμή του x ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του;

14. Ένας εργολάβος επιθυμεί να χτίσει ένα σπίτι στο δρόμο που συνδέει δύο εργοστάσια E_1 και E_2 τα οποία βρίσκονται σε απόσταση 12 km και εκπέμπουν καπνό με παροχές P και 8P αντιστοίχως. Αν η πυκνότητα του καπνού σε μια απόσταση d από ένα τέτοιο εργοστάσιο είναι ανάλογη της παροχής καπνού του εργοστασίου και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης d, να βρείτε σε ποια απόσταση x από το εργοστάσιο E_1 πρέπει ο εργολάβος να χτίσει το σπίτι για να έχει τη λιγότερη δυνατή ρύπανση. (Παροχή καπνού μιας καπνοδόχου ενός εργοστασίου λέγεται η ποσότητα του καπνού που εκπέμπεται από την καπνοδόχο στη μονάδα του χρόνου).

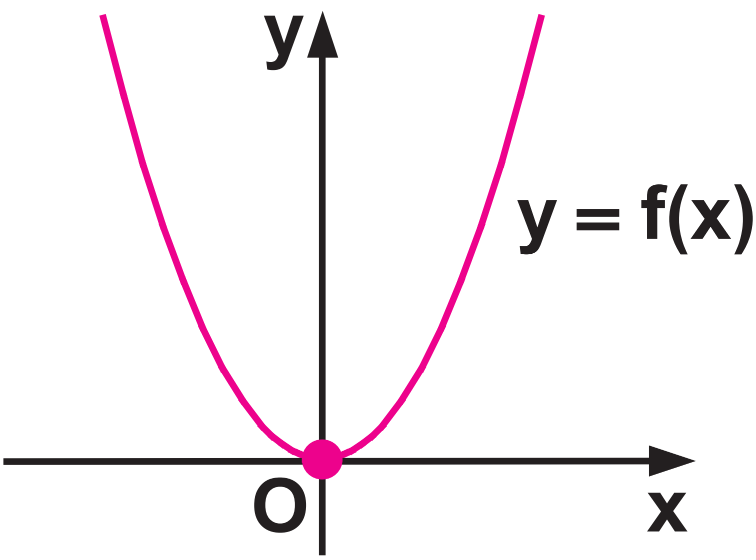


2.8 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

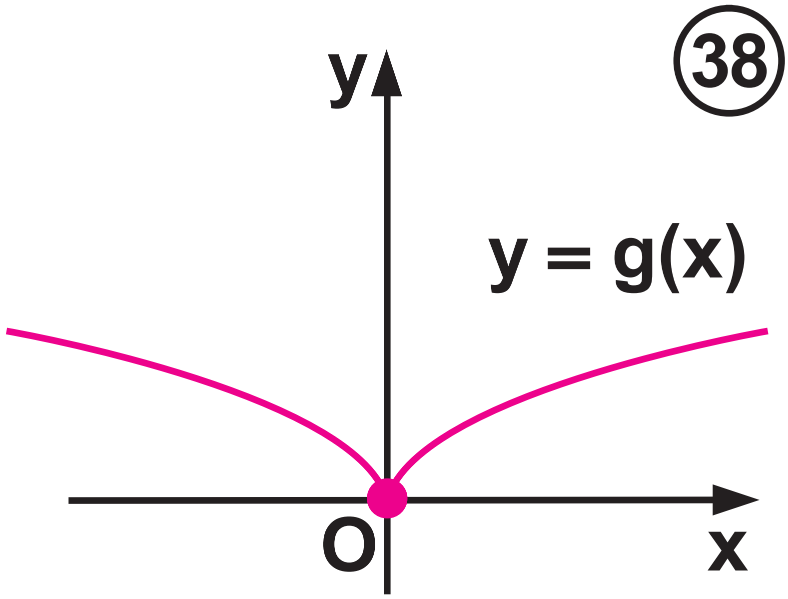
Κοίλα - κυρτά συνάρτησης

• Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=x^2$ και $g(x)=\sqrt{|x|}$ (Σχ. 38).

38



(α)



(β)

Οι πληροφορίες τις οποίες μας δίνει η πρώτη παράγωγος για τη συμπεριφορά κάθε μιας από τις δύο συναρτήσεις, όπως φαίνεται και στο σχήμα 38 είναι ίδιες. Δηλαδή οι συναρτήσεις,

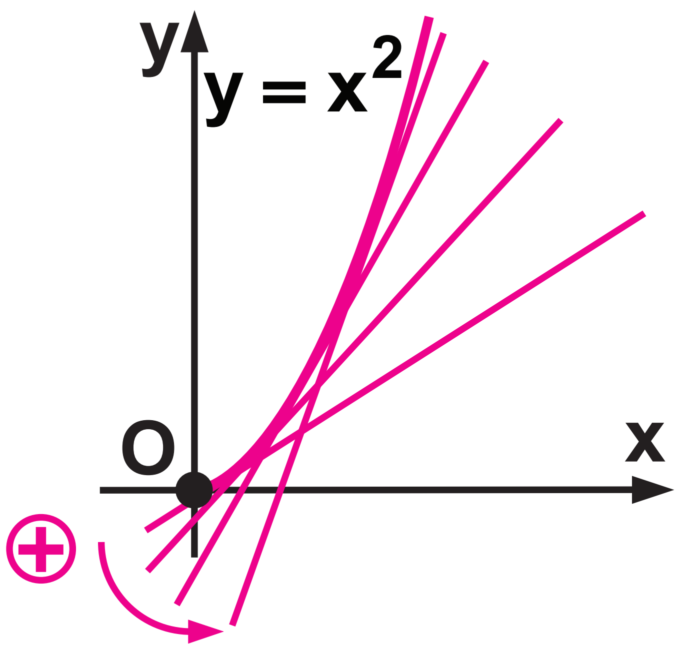
— είναι γνησίως φθίνουσες στο $(-\infty, 0]$

— είναι γνησίως αύξουσες στο $[0, +\infty)$

— παρουσιάζουν τοπικό ελάχιστο για $x = 0$, το οποίο είναι ίσο με 0.

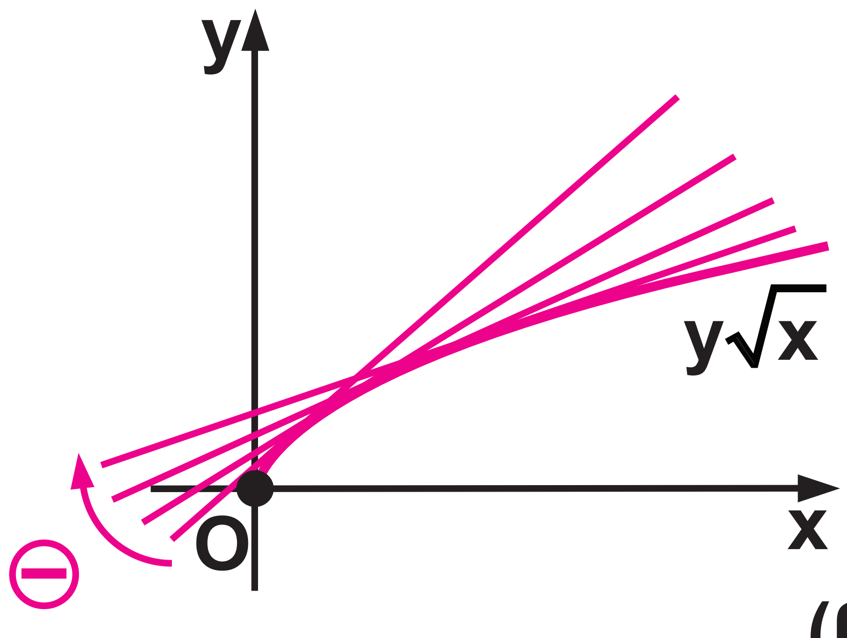
Όμως, οι συναρτήσεις αυτές έχουν διαφορετικές γραφικές παραστάσεις. Δηλαδή, “ανέρχονται” και “κατέρχονται” με διαφορετικό τρόπο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$. Επομένως, οι πληροφορίες που μας δίνει το πρόσημο της πρώτης παραγώγου δεν είναι ικανές για τη χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

Ας θεωρήσουμε τώρα τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων στο διάστημα $[0, +\infty)$.



(α)

Καθώς το x αυξάνεται η εφαπτομένη της C_f στρέφεται κατά τη θετική φορά



(β)

Καθώς το x αυξάνεται η εφαπτομένη της C_g στρέφεται κατά την αρνητική φορά

Παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται:

— η κλίση $f'(x)$ της C_f αυξάνεται, δηλαδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, ενώ

— η κλίση της $g'(x)$ της C_g ελαττώνεται, δηλαδή η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $(0, +\infty)$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση λέμε ότι η g στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $(0, +\infty)$. Γενικότερα, δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι:

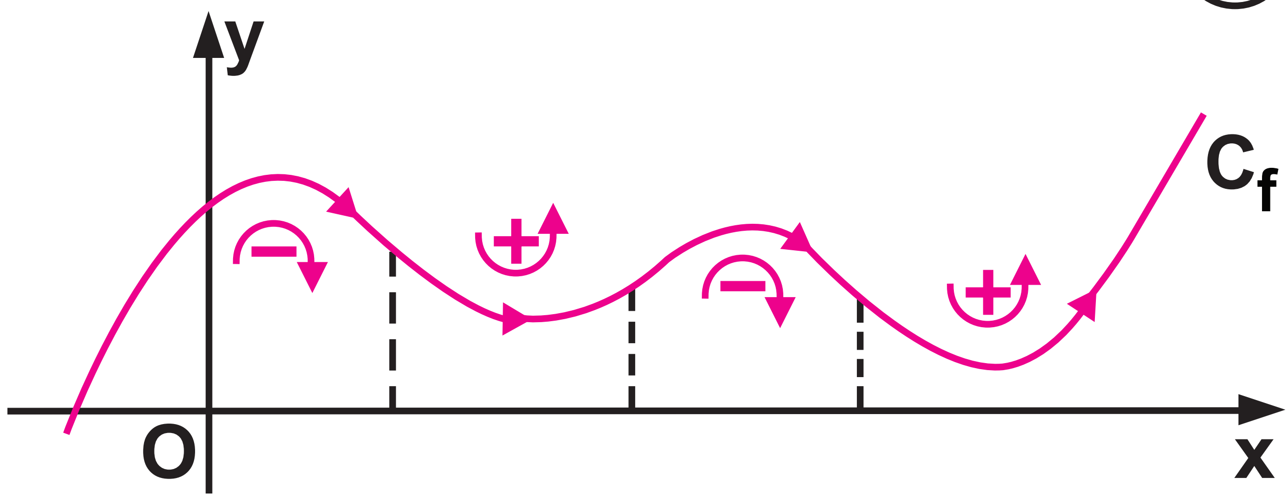
• Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ, αν η f′ είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

• Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ, αν η f′ είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

Εποπτικά, μία συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα Δ, όταν ένα κινητό, που κινείται πάνω στη C_f, για να διαγράψει το τόξο που αντιστοιχεί στο διάστημα

Δ πρέπει να στραφεί κατά τη θετική (αντιστοίχως αρνητική) φορά. (Σχ. 40)

40



Για να δηλώσουμε στον πίνακα μεταβολών ότι μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα Δ, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό (αντιστοίχως).

ΣΧΟΛΙΟ

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ’ ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται “κάτω” (αντιστοίχως “πάνω”) από τη γραφική της παράσταση (Σχ. 39), με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

● Η μελέτη μιας συνάρτησης ως προς τα κοίλα και κυρτά διευκολύνεται με τη βοήθεια του επόμενου θεωρήματος, που είναι άμεση συνέπεια του προηγούμενου ορισμού και του θεωρήματος μονοτονίας.

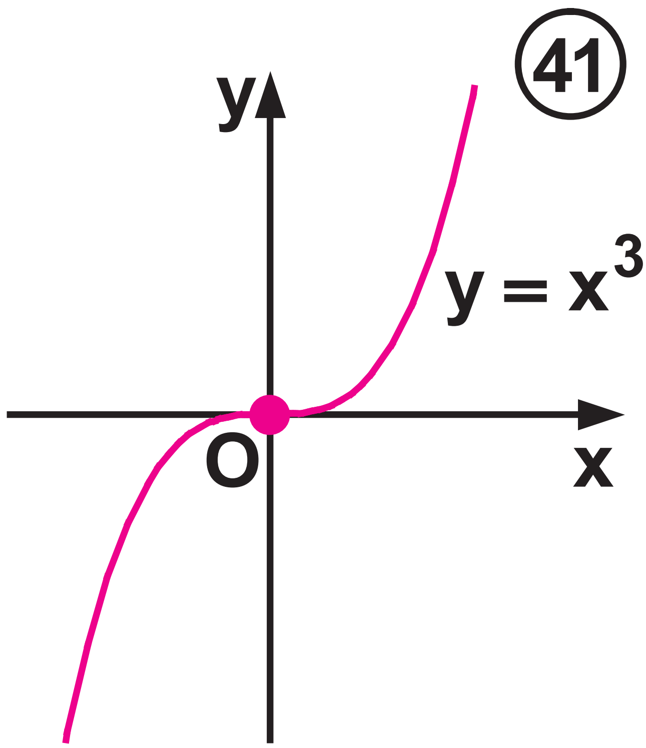
ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ’ ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

• Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

• Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$ (Σχ. 41),

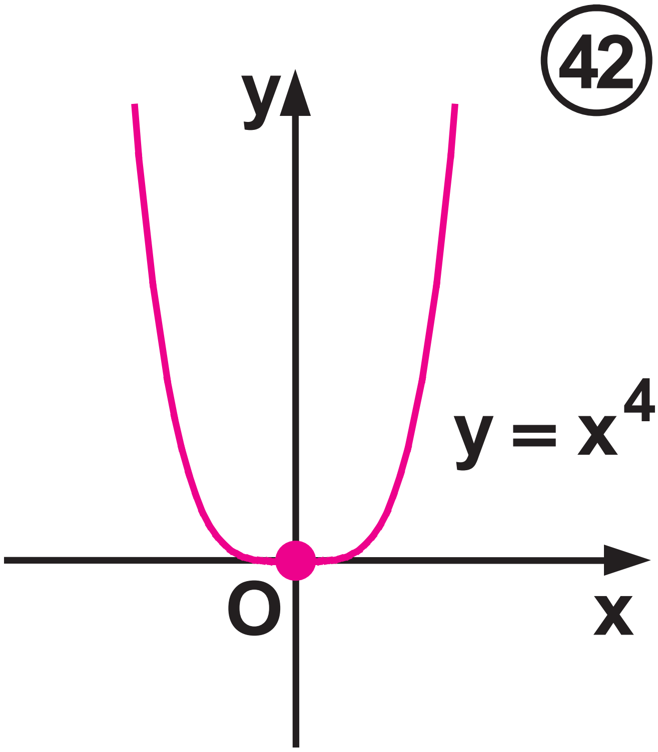


— είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$, αφού $f''(x) = 6x < 0$, για $x \in (-\infty, 0)$ και η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ ενώ,

— είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$, αφού $f''(x) = 6x > 0$, για $x \in (0, +\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

ΣΧΟΛΙΟ

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$ (Σχ. 42). Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$, αφού $f''(0) = 0$.



Σημεία καμπής

Στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$ (Σχ. 41) παρατηρούμε ότι,

(α) στο σημείο Ο(0, 0) η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη και

(β) εκατέρωθεν του $x_0 = 0$, η κυρτότητα της καμπύλης αλλάζει.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η γραφική παράσταση της f “κάμπτεται” στο σημείο O(0, 0). Το σημείο O λέγεται **σημείο καμπής της C_f**. Γενικά δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β), ή αντιστρόφως, και

- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f.

Όταν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε λέμε ότι η f **παρουσιάζει στο x_0 καμπή** και το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμπής**.
Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f "διαπερνά" την καμπύλη.
Αποδεικνύεται, επιπλέον, ότι:

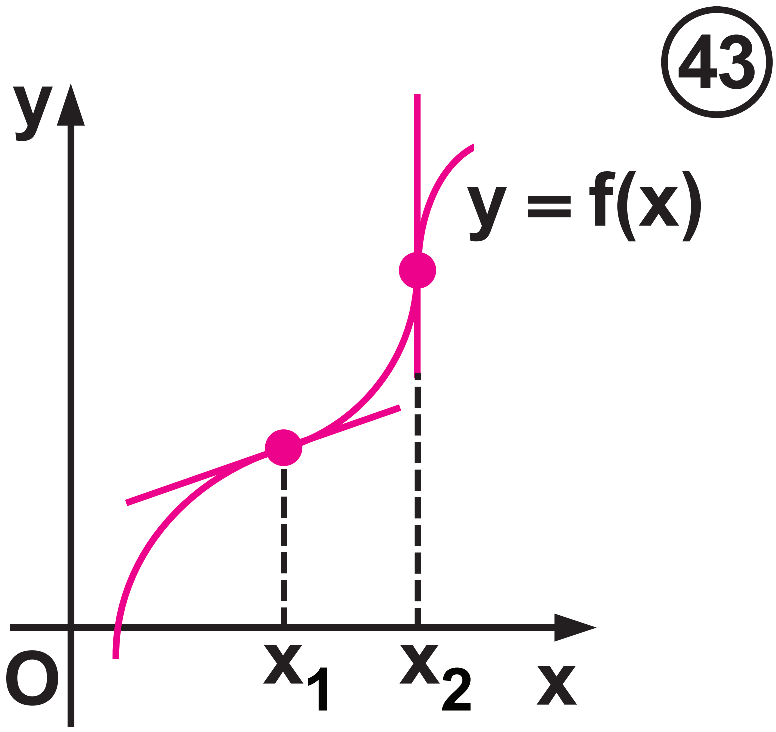
ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η f″ είναι διαφορετική από το μηδέν δεν είναι θέσεις σημείων καμπής. Επομένως, οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής **μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:**

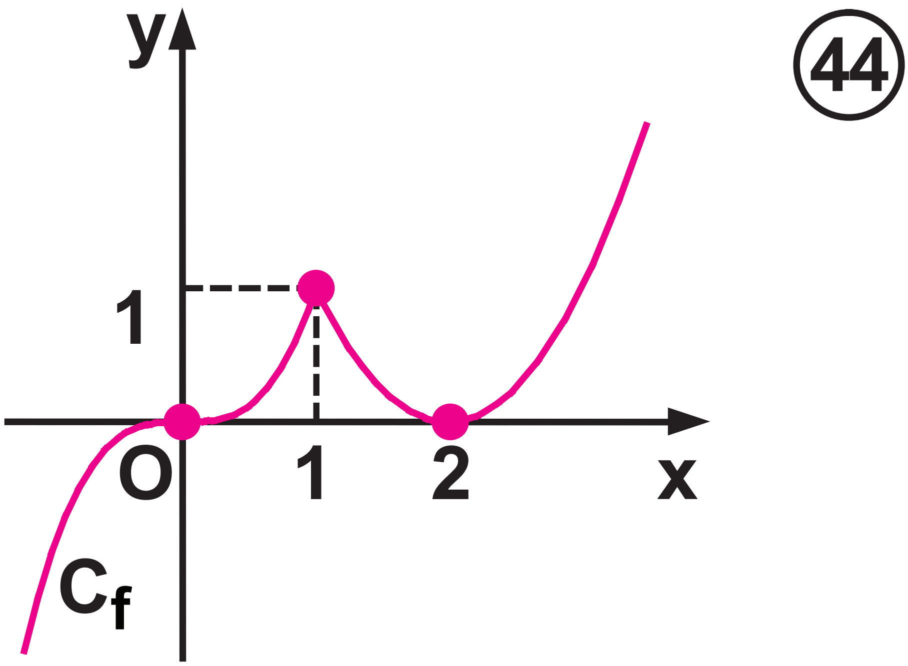
i) **τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f″ μηδενίζεται, και**

ii) **τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f″** (Σχ. 43).



Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & , \quad x<1 \\ (x-2)^4 & , \quad x\geq 1 \end{cases} \quad (\Sigma\chi.\ 44)$$



Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{1\}$ με

$$f''(x)=\begin{cases} 6x & , \quad x<1 \\ 12(x-2)^2 & , \quad x>1 \end{cases}.$$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$ 0 1		1 2 $+\infty$	
$f''(x)$	$-$ 0 $+$		$+$ 0 $+$	
f(x)	κοίλη	κυρτή	κυρτή	κυρτή

Επειδή η f'' μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, οι πιθανές θέσεις των σημείων καμπής είναι τα σημεία 0, 1 και 2. Όμως, όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα και στο σχήμα, τα σημεία 1 και 2 δεν είναι θέσεις σημείων καμπής, αφού σ' αυτά η f δεν αλλάζει κυρτότητα, ενώ το σημείο 0 είναι θέση σημείου καμπής, αφού στο O(0, f(0)) υπάρχει εφαπτομένη της C_f και η f στο 0 αλλάζει κυρτότητα. Παρατηρούμε λοιπόν ότι από τις πιθανές θέσεις σημείων καμπής, θέση σημείου καμπής είναι μόνο το 0, εκατέρωθεν του οποίου η f'' αλλάζει πρόσημο. Γενικά:

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Αν

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και

• ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$, τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να προσδιορισθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 5,$$

είναι κυρτή ή κοίλη και να βρεθούν τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

ΛΥΣΗ

i) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f''(x) = 12(x-1)(x+1)$.

Το πρόσημο της f″ φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	0	+	
f (x)			0 Σ.Κ.		0 Σ.Κ.		

Επομένως, η f είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$ και κοίλη στο διάστημα $[-1,1]$.

Επειδή η f'' μηδενίζεται στα σημεία -1, 1 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο, τα σημεία $A(-1,0)$ και $B(1,0)$ είναι σημεία καμπής της C_f. Τα συμπεράσματα αυτά καταχωρούνται στην τελευταία γραμμή του παραπάνω πίνακα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής των γραφικών τους παραστάσεων

   i) $f(x)=3x^5-5x^4+2$

   ii) $g(x)=\dfrac{3x^2-2}{x^3}$.

2. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

   i) $f(x)=xe^{1-x}$

   ii) $g(x)=x^2(2\ln x-5)$

iii) $h(x)=\begin{cases} -3x^2+1 & , x<0 \\ -x^3+3x^2+1 & , x\geq 0 \end{cases}.$

3. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=e^{-x^2}$

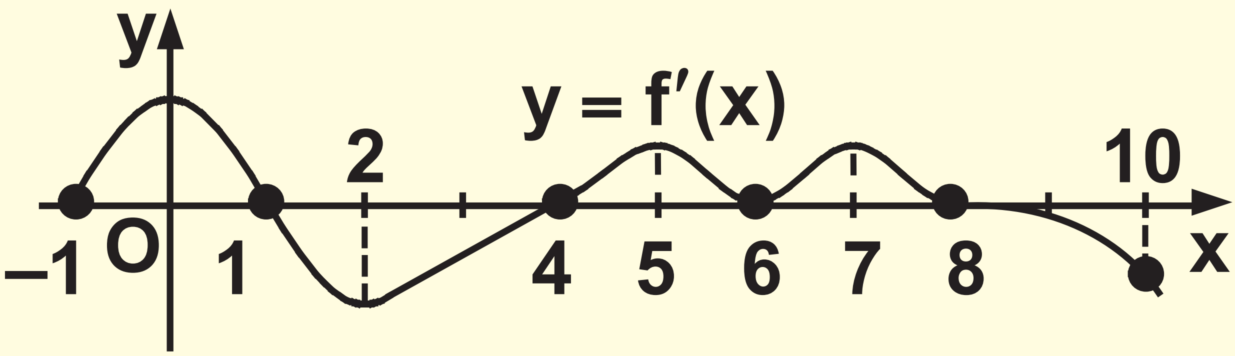
ii) $g(x)=\text{εφ}x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

iii) $h(x)=x|x|$

iv) $\varphi(x)=\sqrt{|x|}$

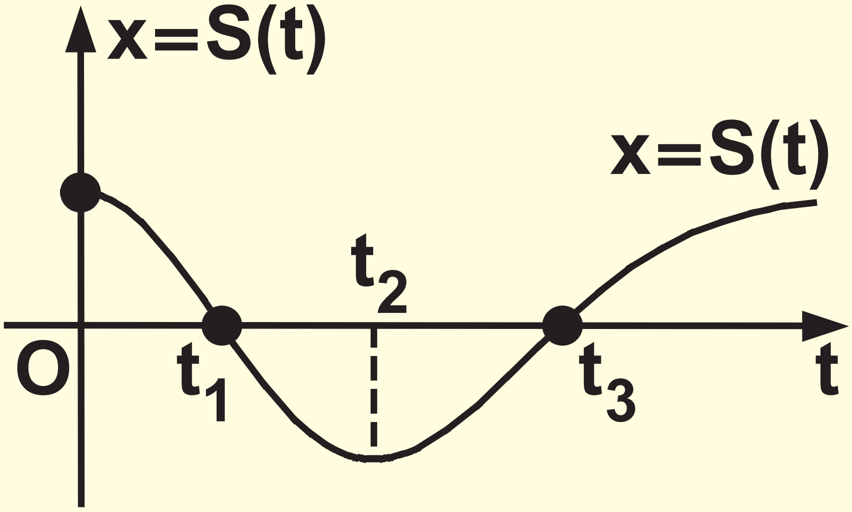
v) $\psi(x)=\begin{cases} -\sqrt{-x} & , \quad x<0 \\ \sqrt{x} & , \quad x\geq 0 \end{cases}.$

4. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης f στο διάστημα [–1,10].



Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής.

5. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης θέσεως $x = S(t)$ ενός κινητού που κινείται πάνω σε έναν άξονα. Αν η C παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές t_1 και t_3, να βρείτε:



i) Πότε το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά και πότε κατά την αρνητική φορά.

ii) Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

και να αποδείξετε ότι δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2$$

έχει για κάθε τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στην παραβολή $y = -x^2 + 2$.

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (-2,2)$ η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 6x^2 + 2x + 1$ είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

i) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

ii) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η

θέση του σημείου καμπής, να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

5. Έστω f μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγίσιμη στο (–2,2), για την οποία ισχύει

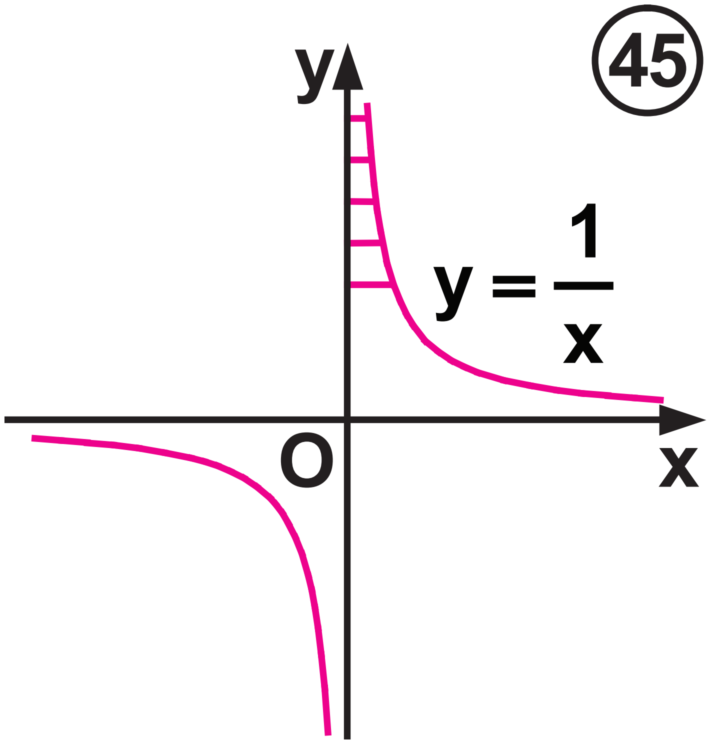
$$f^2(x) - 2\,f(x) + x^2 - 3 = 0.$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

2.9 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ - ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

Ασύμπτωτες

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (Σχ. 45).



Όπως είδαμε:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x τείνει στο 0 από θετικές τιμές, η γραφική παράσταση της f τείνει να συμπέσει με την ευθεία $x = 0$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία $x = 0$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f.
Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.

● Για την ίδια συνάρτηση παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x τείνει στο $+\infty$, η γραφική παράσταση της f τείνει να συμπέσει με την ευθεία $y = 0$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία $y = 0$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x τείνει στο $-\infty$, η γραφική παράσταση της f τείνει να συμπέσει με την ευθεία $y = 0$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία $y = 0$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

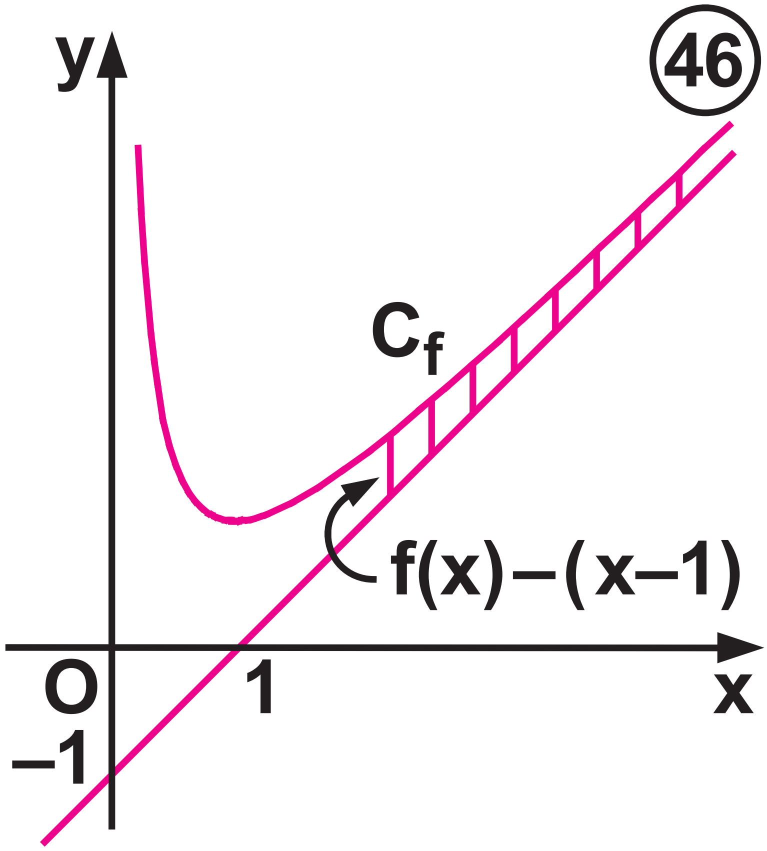
Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$), τότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

• Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x}$$

και η ευθεία

$$g(x)=x-1 \quad (\text{Σχ. } 46).$$



Επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

καθώς το x τείνει στο +∞, οι τιμές της f προσεγγίζουν τις τιμές της g. Δηλαδή, η γραφική παράσταση της f προσεγγίζει την ευθεία y = x – 1. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία y = x – 1 είναι **ασύμπτωτη**

(πλάγια) της C_f στο $+\infty$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0,$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0.$$

Η ασύμπτωτη $y = \lambda x + \beta$ είναι **οριζόντια** αν $\lambda = 0$, ενώ αν $\lambda \neq 0$ λέγεται **πλάγια** ασύμπτωτη. Για τον προσδιορισμό των ασυμπτώτων μιας συνάρτησης ισχύει το παρακάτω θεώρημα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R},$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}.$$

ΣΧΟΛΙΑ

1. Αποδεικνύεται ότι:

   — Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

   — Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή P(x) μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

2. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:

— Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.

— Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

— Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$ αντιστοίχως $(-\infty,\alpha)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x)=x+\frac{1}{x}.$$

ΛΥΣΗ

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ και είναι συνεχής σ' αυτό, θα αναζητήσουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 0 και πλάγιες στο $-\infty$ και $+\infty$. Είναι

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty,$$

Άρα, η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f. Εξετάζουμε, τώρα, αν υπάρχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη της μορφής $y = \lambda x + \beta$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1, \text{ οπότε}$$

$\lambda = 1$ και

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,\text{ οπότε } \beta=0.$$

Επομένως, η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.
Ανάλογα βρίσκουμε ότι η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f και στο $-\infty$.

Κανόνες de L' Hospital

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x^3}$. Για να εξετάσουμε αν η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f, χρειάζεται να υπολογίσουμε το

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^3}. \qquad (1)$$

Παρατηρούμε ότι, αν εφαρμόσουμε τον κανόνα του ορίου πηλίκου, παρουσιάζεται απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$. Οι μέθοδοι που εφαρμόσαμε στο κεφάλαιο του ορίου για την άρση της απροσδιοριστίας (απλοποίηση κτλ.) δεν εφαρμόζονται στο πιο πάνω όριο.

Για τα όρια πηλίκου που οδηγούν σε απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, ισχύουν τα επόμενα θεωρήματα (η απόδειξή τους παραλείπεται), που είναι γνωστά ως κανόνες **de l' Hospital**.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο $\left(\text{μορφή}\,\frac{0}{0}\right)$

Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Έτσι το παραπάνω όριο (1) υπολογίζεται ως εξής:

Έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} (e^x - 1) = 0, \ \lim_{x \to 0} x^3 = 0$$

και

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{3x^2}=+\infty$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^3}=+\infty,$$

που σημαίνει ότι η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο $\left(\text{μορφή}\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$

$x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, και υπάρχει το

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Για παράδειγμα, ο υπολογισμός του $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}$ γίνεται ως εξής:

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty\,,\quad \lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty.$$

Επομένως:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty .$$

ΣΧΟΛΙΑ

1. Το θεώρημα 2 ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}$.

2. Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Δίνεται η συνάρτηση**

$f(x) = x + 2 - \dfrac{4e^x}{e^x + 1}$. Να αποδειχτεί ότι:

i) Η ευθεία $y = x + 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

ii) Η ευθεία $y = x - 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0.$$

Πράγματι, έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4e^x}{e^x+1}=$$

$$=\frac{-4\cdot 0}{0+1}=0.$$

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=0.$$

Πράγματι, έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim_{x\to+\infty}\left[4-\frac{4e^x}{e^x+1}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{e^x+1}=0.$$

2. **Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης**

$$f(x)=\frac{x}{e^x}.$$

ΛΥΣΗ

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ η γραφική της παράσταση δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Θα αναζητήσουμε, επομένως, ασύμπτωτες στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

• Για να είναι η $y=\lambda x+\beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, αρκεί τα όρια

$$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ και } \beta=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]$$

να είναι πραγματικοί αριθμοί.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$,

η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

• Για να είναι η $y=\lambda x+\beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αρκεί τα όρια

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ και } \beta=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]$$

να είναι πραγματικοί αριθμοί.
Έχουμε:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0 \text{ και}$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=$$

$$\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'}$$

(Κανόνας De L’ Hospital)

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Άρα, η ευθεία $y=0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$, είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

   i) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

   ii) $f(x)=\varepsilon\varphi x,\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

   iii) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$

iv) $f(x)=\begin{cases} x & , \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & , \quad x > 0 \end{cases}$.

2. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

   i) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$

   ii) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

   i) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-1}$

ii) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-2}$ iii) $f(x)=\sqrt{x^2+x}$.

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx}{\ln(x+1)}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-συνx^2}{x^4}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-ημx}{1-συνx}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$ και οι ευθείες $ε_1$: $y=-x-1$ και $ε_2$: $y=x+1$. Να αποδείξετε ότι

   i) Η $ε_1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, ενώ η $ε_2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

   ii) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $x^2+2x+2>(x+1)^2\geq 0$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την $ε_1$ κοντά στο $-\infty$ και πάνω από την $ε_2$ κοντά στο $+\infty$.

2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f όταν:

i) $f(x)=\dfrac{x^2}{2^x}$ ii) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

3. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \eta\mu x+\alpha & , \quad x \le 0 \\ e^{\beta x} & , \quad x>0 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

4. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\ln x}{1-x} & , \quad 0<x\neq 1 \\ -1 & , \quad x=1 \end{cases}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι συνεχής

ii) $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{x - 1} &, \text{αν} \quad x \neq 1 \\ 0 &, \text{αν} \quad x = 1 \end{cases}$$

και

$$g(x) = \begin{cases} x^2 &, \quad \text{αν} \quad x \leq 1 \\ 1 + \dfrac{\ln x}{x} &, \quad \text{αν} \quad x > 1 \end{cases}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) Η f είναι συνεχής και

παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, ενώ

ii) Η g είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

6. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 0 \\ (1 - e^{-x})\ln x & , \quad x \in (0,1] \end{cases}.$$

i) Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{-x}}{x} \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 0} x \ln x$$

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο O(0,0).

2.10 ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΧΑΡΑΞΗ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πώς, με τη βοήθεια των πληροφοριών που αποκτήσαμε μέχρι τώρα, μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης με ικανοποιητική ακρίβεια. Η πορεία την οποία ακολουθούμε λέγεται **μελέτη της συνάρτησης** και περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα:

1ο Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f.

2ο Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο πεδίο ορισμού της.

3ο Βρίσκουμε τις παραγώγους f' και f'' και κατασκευάζουμε τους πίνακες των προσήμων τους. Με τη βοήθεια του προσήμου της f' προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f, ενώ με τη βοήθεια του προσήμου της f'' καθορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής.

4ο Μελετούμε τη “συμπεριφορά” της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (οριακές τιμές, ασύμπτωτες, κτλ.)

5ο Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω συμπεράσματα σ’ ένα συνοπτικό πίνακα που λέγεται και **πίνακας μεταβολών της f** και με τη βοήθειά του χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f. Για καλύτερη σχεδίαση της C_f κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της f.

ΣΧΟΛΙΟ

1) Όπως είναι γνωστό, αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι άρτια, τότε η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, ενώ αν είναι περιττή, η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O. Επομένως, για τη μελέτη μιας τέτοιας συνάρτησης μπορούμε να περιοριστούμε στα $x \in A$, με $x \geq 0$.

2) Αν μια συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο T, τότε περιορίζουμε τη μελέτη της C_f σ' ένα διάστημα πλάτους T.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 11.$$

ΛΥΣΗ

1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

2. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

3. Έχουμε

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3).$$

Οι ρίζες της f' είναι οι $x = 3$, $x = 0$ (διπλή) και το πρόσημό της δίνονται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↘	-16 Τ.Ε.	↗	

Έχουμε επίσης

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2).$$

Οι ρίζες της f'' είναι οι $x = 0$, $x = 2$ και το πρόσημό της δίνονται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			11 Σ.Κ.		-5 Σ.Κ.		

4) Η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$ και $-\infty$, αφού είναι πολυωνυμική τέταρτου βαθμού. Είναι όμως:

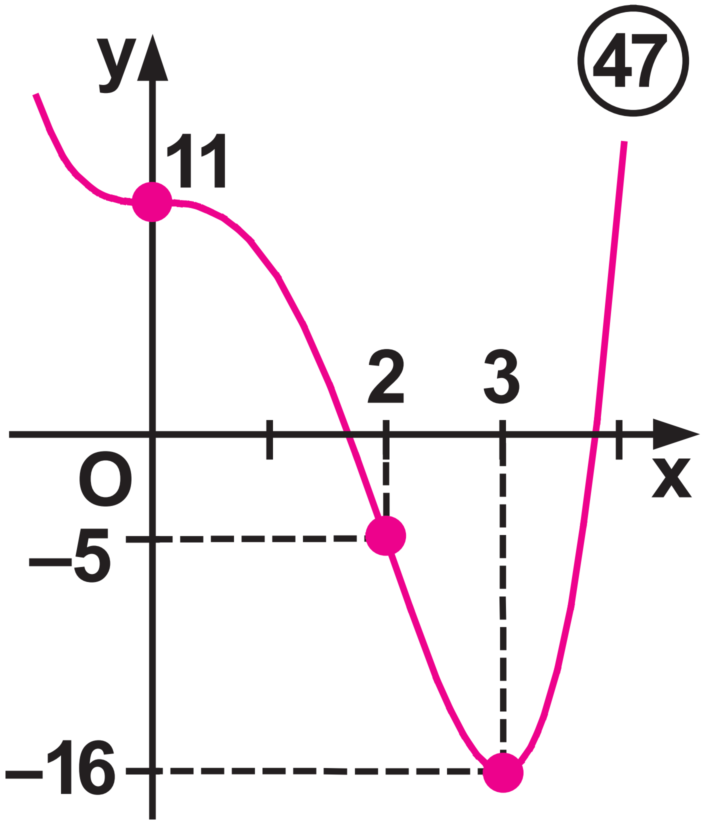
$$\lim_{x\to+\infty}(x^4-4x^3+11)=\lim_{x\to+\infty}x^4=+\infty$$

και

$$\lim_{x\to-\infty}(x^4-4x^3+11)=\lim_{x\to-\infty}x^4=+\infty.$$

5) Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f και χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f.

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	11 Σ.Κ.	$\searrow$	-5 Σ.Κ.	$\searrow$	-16 Τ.Ε.	$\nearrow$	$+\infty$



2. **Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση**

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}.$$

ΛΥΣΗ

1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{1\}$.

2. Η f είναι συνεχής ως ρητή.

3. Έχουμε

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-x+4}{x-1}\right)'=$$

$$=\frac{(2x-1)(x-1)-x^2+x-4}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}.$$

Οι ρίζες της f' είναι -1, 3 και το πρόσημό της δίνονται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-3 Τ.Μ.	↘	‖	↘	5 Τ.Ε.	↗	

Έχουμε επίσης

$$f''(x) =$$

$$\frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-3)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{8}{(x-1)^3}.$$

Η f'' δεν έχει ρίζες και το πρόσημό της δίνεται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

4) Επειδή $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, η ευθεία $x = 1$

είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Εξετάζουμε τώρα αν υπάρχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη της μορφής $y = \lambda x + \beta$.

Έχουμε:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x + 4}{x^2 - x} = 1,$$

οπότε $\lambda = 1$

και

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+4}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x-1}=0,$$

οπότε $\beta=0$.

Επομένως, η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Ανάλογα βρίσκουμε ότι η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.

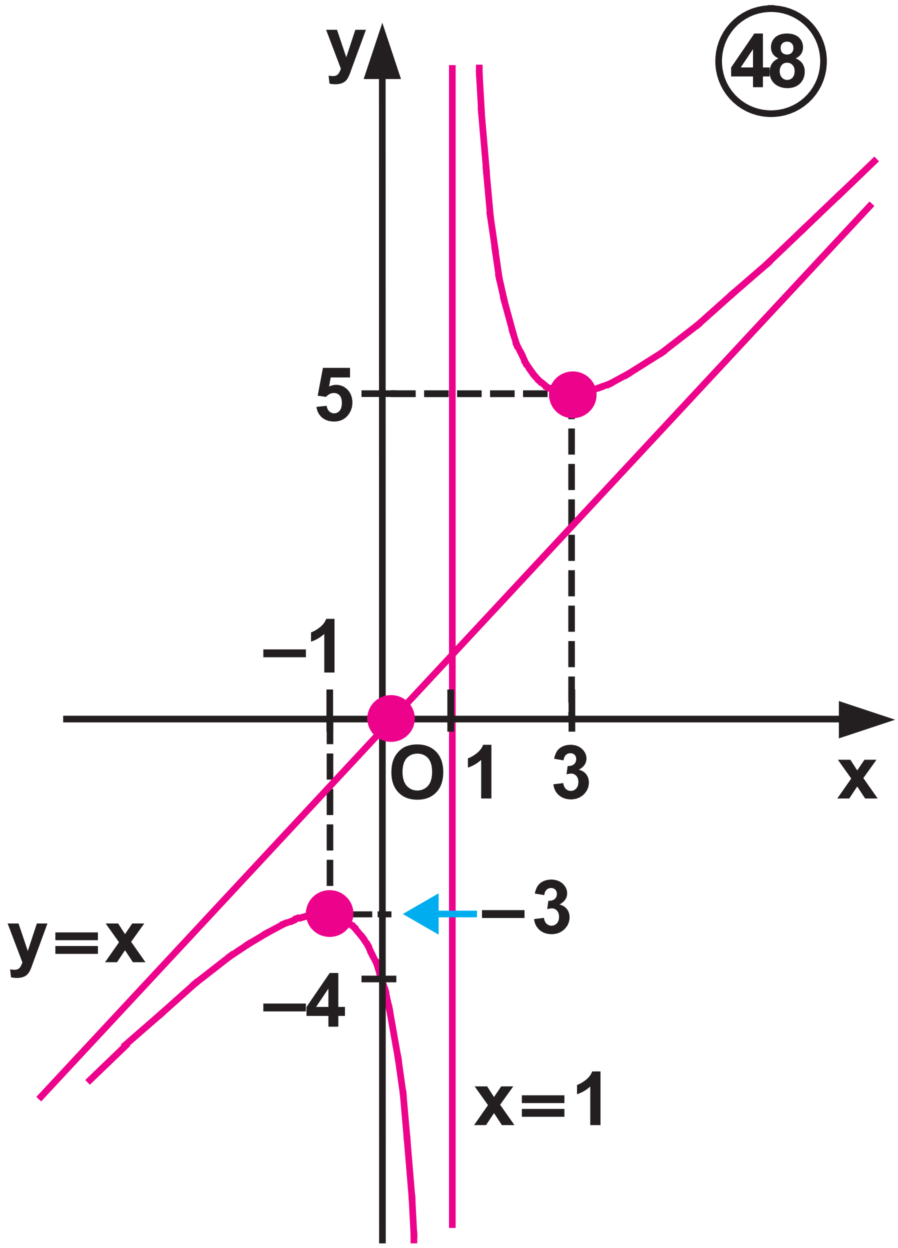
Επίσης έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+4}{x-1}=-\infty$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x+4}{x-1}=+\infty.$

5) Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f και χαράσσουμε τη γραφική της παράσταση.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3 T.M.	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5 T.E.	↗	$+\infty$



48
y
x
5
–1
O
1
3
–3
–4
y=x
x=1

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

   i) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$

   ii) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

   iii) $f(x) = x^4 - 2x^2$.

2. Ομοίως τις συναρτήσεις:

   i) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

   ii) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x-1}$.

3. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = x + ημx$ στο διάστημα $[-π, π]$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Γ΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = x^2 - 3x + 3$, $x \in (0, +\infty)$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $A(1,1)$.

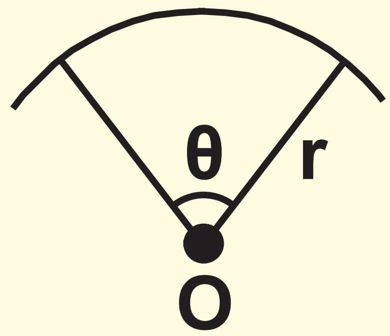
   ii) Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και C_g στο διάστημα $(0, +\infty)$.

2. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, με $f(0) = g(0)$ και $f'(x) > g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $f(x) < g(x)$ στο $(-\infty, 0)$ και $f(x) > g(x)$ στο $(0, +\infty)$.

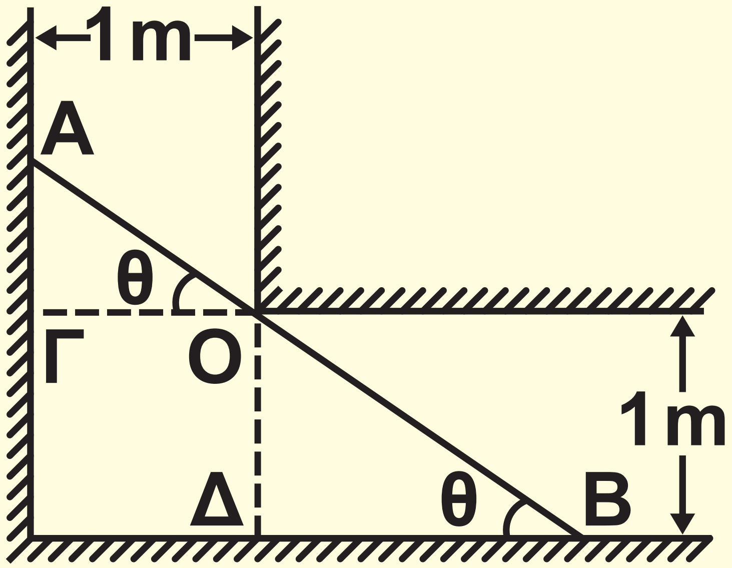
3. Ισοσκελές τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα 1. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του είναι $E = (1 + συνθ)ημθ$. Να βρείτε την τιμή της γωνίας $θ \in (0, π)$ για την οποία εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται.

4. Ένα σύρμα μήκους 20 m διατίθεται για την περίφραξη ενός

ανθόκηπου σχήματος κυκλικού τομέα. Να βρείτε την ακτίνα r του κύκλου, αν επιθυμούμε να έχουμε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια του κήπου.



5. Δύο διάδρομοι πλάτους 1 m τέμνονται κάθετα (Σχήμα). Να βρείτε το μεγαλύτερο δυνατό μήκος μιας σκάλας που μπορεί, αν μεταφερθεί οριζόντια, να στρίψει στη γωνία.



Υπόδειξη:

i) Να εκφράσετε τα ΟΑ, ΟΒ συναρτήσει της γωνίας θ, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$(AB) = \frac{1}{\eta\mu\theta} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} = f(\theta).$$

iii) Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ, για την οποία το ΑΒ γίνεται ελάχιστο.

6. i) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha^{\alpha+1}>(\alpha+1)^{\alpha}$ για κάθε $\alpha>e$.

iii) Να αποδείξετε ότι για $x>0$ ισχύει $2^x=x^2 \Leftrightarrow f(x)=f(2)$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2^x=x^2$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x_1=2$, $x_2=4$.

7. i) Αν $\alpha, \beta>0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x+\beta^x\geq 2$, να αποδείξετε ότι $\alpha\beta=1$.

ii) Αν $\alpha > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x \geq x+1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

8. **i)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι κυρτή, ενώ η $g(x) = \ln x$ είναι κοίλη.

ii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,1)$ και της C_g στο $B(1,0)$.

iii) Να αποδείξετε ότι:

α) $e^x \geq x+1, \quad x \in \mathbb{R}$

β) $\ln x \leq x-1, \quad x \in (0,+\infty)$.

Πότε ισχύουν οι ισότητες;

iv) Η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g .

9. i) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = e^x - \lambda x,\ \lambda > 0.$$

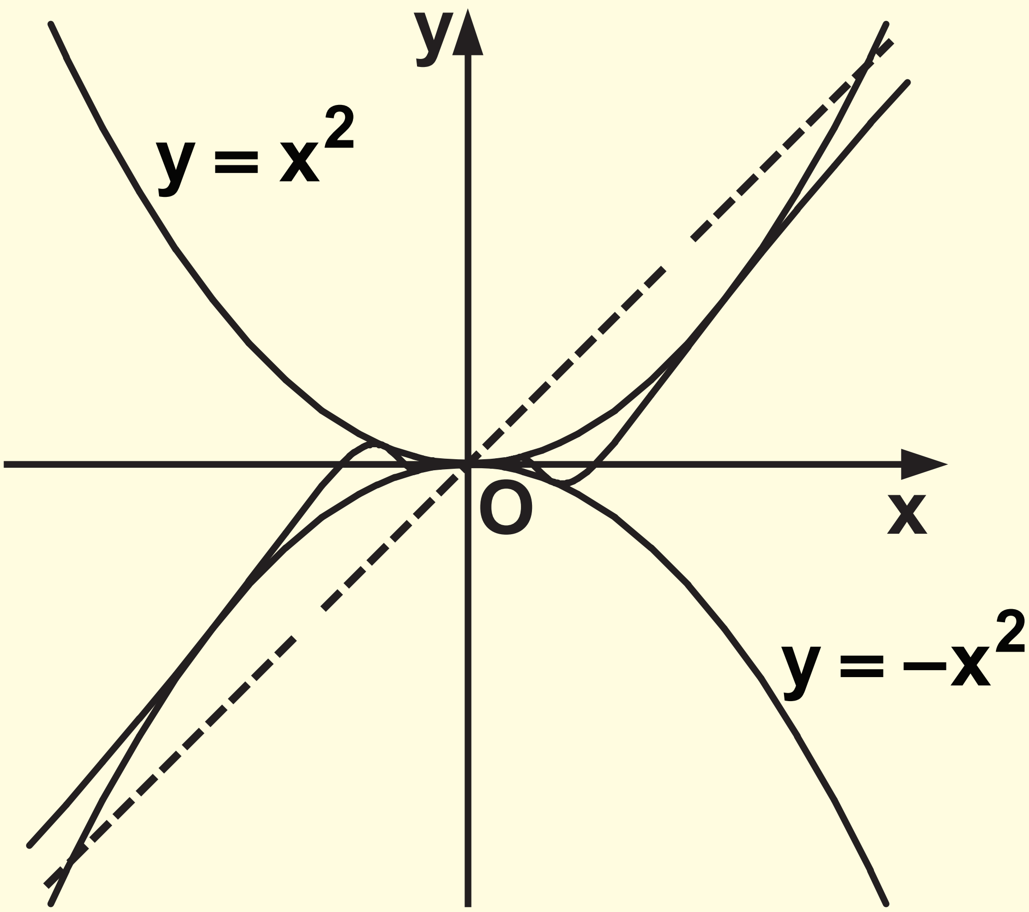
ii) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει

$$e^x \geq \lambda x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

iii) Για την τιμή του λ που θα βρείτε παραπάνω να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = e^x$.

10. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x} & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}.$$



Να αποδείξετε ότι

i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και στη συνέχεια ότι η ευθεία $y = 0$ (ο άξονας $x'x$) είναι η εφαπτομένη της C_f στο $O(0, 0)$.

ii) Ο άξονας $x'x$ έχει με την C_f άπειρα κοινά σημεία, παρόλο που εφάπτεται της C_f.

iii) Η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

11. Α. Έστω μια συνάρτηση φ τέτοια, ώστε

$\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$ και $\varphi''(x) +$
$+ \varphi(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1)

Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $\psi(x)=[\varphi'(x)]^2+[\varphi(x)]^2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τον τύπο της.

ii) $\varphi(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β. Έστω δύο συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε:

$f(0)=0$, $f'(0)=1$ και $f''(x)+f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$g(0)=1$, $g'(0)=0$ και $g''(x)+g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

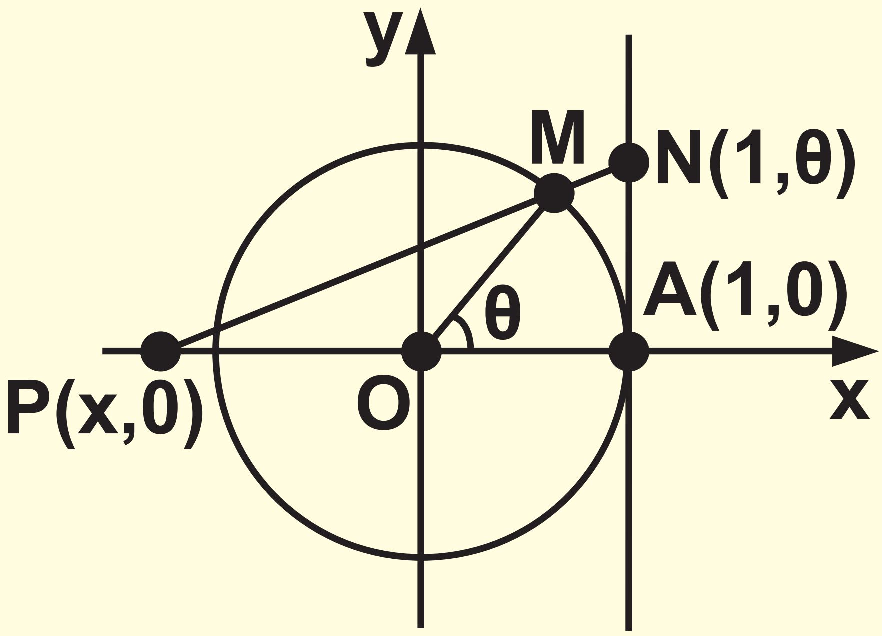
Να αποδείξετε ότι:

i) Οι συναρτήσεις $\varphi(x) = f(x) -$ $-$ ημx και $\psi(x) = g(x) -$ συνx ικανοποιούν τις υποθέσεις (1) του ερωτήματος Α.

ii) $f(x) =$ ημx και $g(x) =$ συνx για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

12. Στο παρακάτω σχήμα ο κύκλος έχει ακτίνα 1 cm και η ε εφάπτεται σε αυτόν στο σημείο Α.

Το τόξο ΑΜ είναι θ rad και το ευθ. τμήμα ΑΝ είναι θ cm. Η ευθεία ΜΝ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $P(x, 0)$.



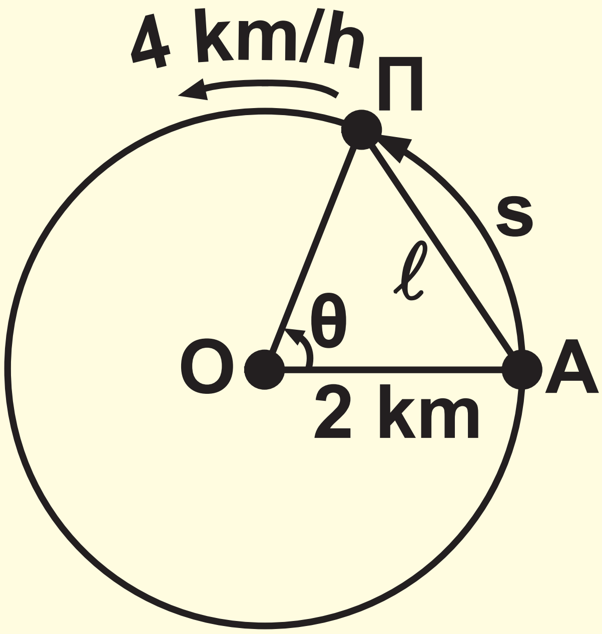
Να δείξετε ότι:

i) $x = \dfrac{θσυνθ - ημθ}{θ - ημθ} = x(θ)$

ii) $\lim\limits_{θ \to 0} x(θ) = -2.$

13. Ένας πεζοπόρος Π ξεκινάει από ένα σημείο Α και βαδίζει γύρω από μια κυκλική λίμνη ακτίνας $ρ = 2$ km με ταχύτητα

$\upsilon = 4$ km/h. Αν S είναι το μήκος του τόξου ΑΠ και ℓ το μήκος της απόστασης ΑΠ του πεζοπόρου από το σημείο εκκίνησης τη χρονική στιμή t:



A) Να αποδείξετε ότι

i) $\theta = \dfrac{S}{2}$ και $\ell = 4\eta\mu\dfrac{\theta}{2}$,

ii) $S = 4t$, $\theta = 2t$ και $\ell = 4\eta\mu t$.

B) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης ℓ ως προς τον χρόνο t. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης ℓ ως προς τον χρόνο t, όταν

α) $\theta = \frac{2\pi}{3}$, β) $\theta = \pi$ και

γ) $\theta = \frac{4\pi}{3}$;

14. Ένας αγρότης θέλει να προσλάβει εργάτες για να μαζέψουν 12500 κιλά ντομάτες. Κάθε εργάτης μαζεύει 125 κιλά την ώρα και πληρώνεται 6 ευρώ την ώρα. Για το συντονισμό και επιστασία των

εργατών ο αγρότης θα προσλάβει και έναν επιστάτη τον οποίο θα πληρώνει 10 ευρώ την ώρα. Ο αγρότης, επιπλέον, θα πληρώσει στο σωματείο των εργατών εισφορά 10 ευρώ για τον επιστάτη και κάθε εργάτη. Να βρείτε πόσους εργάτες πρέπει να προσλάβει ο αγρότης για να του κοστίσει το ελάχιστο δυνατόν και ποιο θα είναι το ελάχιστο κόστος.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

I.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής δικαιολογώντας συγχρόνως την απάντηση σας.

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$. Α Ψ

2. Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\beta) < f(\alpha)$,

τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$
τέτοιο, ώστε $f'(x_0) < 0$. Α Ψ

3. Αν οι f, g είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο [α, β], με $f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f(\beta) = g(\beta)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες. Α Ψ

4. Αν $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

   α) το f(1) είναι τοπικό μέγιστο της f Α Ψ

   β) το f(2) είναι τοπικό ελάχιστο της f Α Ψ

5. α) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη. Α Ψ

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη. Α Ψ

6. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής. Α Ψ

7. Αν οι συναρτήσεις f, g

έχουν στο x_0 σημείο καμπής, τότε και η $h = f \cdot g$ έχει στο x_0 σημείο καμπής. Α Ψ

8. Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια. Α Ψ

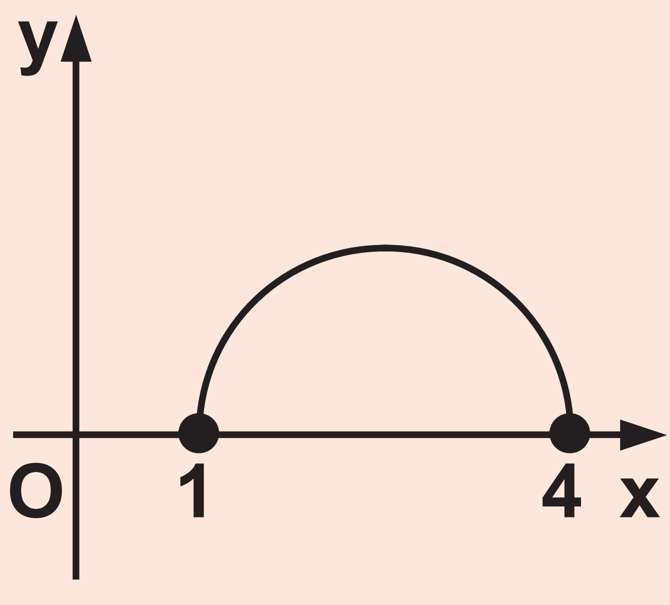
9. Η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της

γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

α) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ Α Ψ

β) $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x - 1)^2}$ Α Ψ

10. Αν γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται από το παρακάτω σχήμα, τότε:



i) το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $(1,4)$ Α Ψ

ii) το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $[1,4]$ Α Ψ

iii) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, 4)$ Α Ψ

iv) υπάρχει $x_0 \in (1,4)$: $f'(x_0) = 0$. Α Ψ

11. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει:

α) μια, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0,1)$ Α Ψ

β) μια, ακριβώς, ρίζα
στο $(-1,0)$ **Α Ψ**

γ) τρεις πραγματικές
ρίζες **Α Ψ**

12. Αν για τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g ισχύουν $f(0)=4$, $f'(0)=3$, $f'(5)=6$, $g(0)=5$, $g'(0)=1$, $g'(4)=2$, τότε $(f \circ g)'(0)=(g \circ f)'(0)$ **Α Ψ**

ΙΙ.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση

1. Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\text{εφ}\left(\dfrac{\pi}{6}+h\right)-\text{εφ}\dfrac{\pi}{6}}{h}$ ισούται με:

   A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\dfrac{4}{3}$ Γ) $\sqrt{3}$ Δ) 0

   Ε) $\dfrac{3}{4}$.

2. Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}$ ισούται με:

Α) $\dfrac{1}{x^2}$ Β) $-\dfrac{2}{x^2}$ Γ) $-\dfrac{1}{x^2}$

Δ) $-\dfrac{2}{x}$ Ε) 0

3. Αν $f(x) = 5^{3x}$ τότε η $f'(x)$ ισούται με:

Α) $3x5^{3x-1}$ Β) $\dfrac{5^{3x}}{3\ln 5}$

Γ) $3 \cdot 5^{2x}$ Δ) $3 \cdot 5^{3x}$

Ε) $5^{3x}\ln 125$

4. Αν $f(x) = συν^3(x+1)$ τότε η $f'(π)$ ισούται με:

Α) $3συν^3(π+1)ημ(π+1)$

Β) $3\sigma\upsilon\nu^2(\pi + 1)$

Γ) $-3\sigma\upsilon\nu^2(\pi + 1)\eta\mu(\pi + 1)$

Δ) $3\pi\sigma\upsilon\nu^2(\pi + 1)$

5. Αν $f(x) = (x^2 - 1)^3$ τότε η έβδομη παράγωγος αυτής στο 0 ισούται με:

Α) 1 Β) –1 Γ) 0 Δ) 27

Ε) δεν υπάρχει.

6. Αν οι εφαπτόμενες των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και $g(x) = 2x^2$ στα σημεία με τετμημένη x_0 είναι παράλληλες, τότε το x_0 είναι:

Α) 0 Β) $\frac{1}{4}$ Γ) $\frac{1}{2}$ Δ) 1

Ε) 2.

7. Αν $f(x)=e^{\beta x}$, $g(x)=e^{\alpha x}$ και $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε το β ως συνάρτηση του α ισούται με:

Α) $\frac{\alpha-1}{\alpha^2}$ Β) $\frac{\alpha^2}{\alpha+1}$ Γ) $\frac{\alpha+1}{\alpha^2}$

Δ) $\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}$ Ε) $\frac{\alpha^2}{\alpha-1}$.

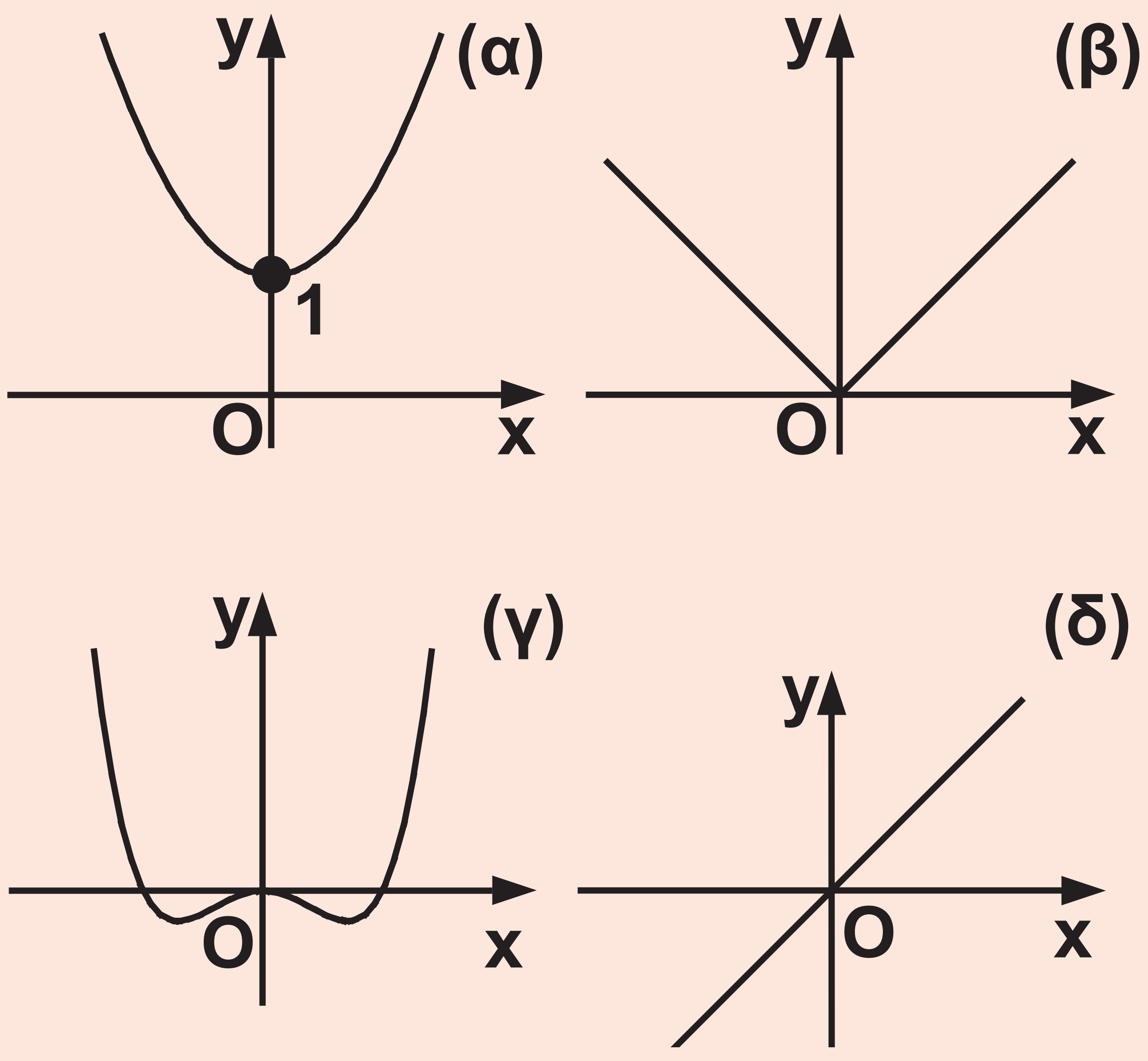
8. Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[-1,1]$ και $f(0)=0$, τότε:

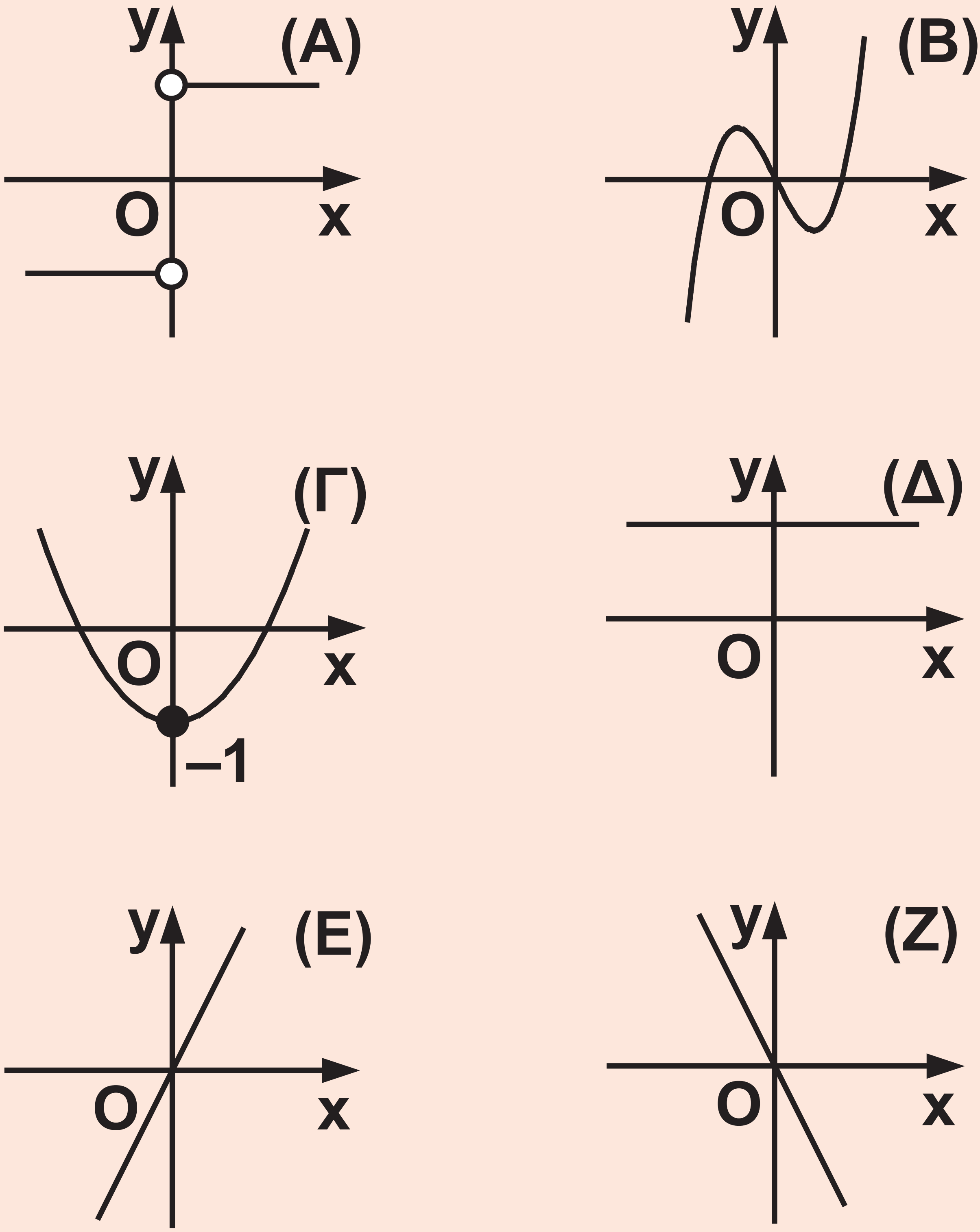
Α) $f(1) = -1$ Β) $f(-1) > 0$

Γ) $f(1) > 0$ Δ) $f(-1) = 0$.

III.

1. Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις συναρτήσεις α, β, γ, δ σε εκείνη από τις συναρτήσεις Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ που νομίζετε ότι είναι η παράγωγός της.




(Α)
y
O
x
(Β)
y
O
x
(Γ)
y
O
x
–1
(Δ)
y
O
x
(Ε)
y
O
x
(Ζ)
y
O
x

2. Καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις να αντιστοιχίσετε στην ευθεία που είναι ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης στο $+\infty$.

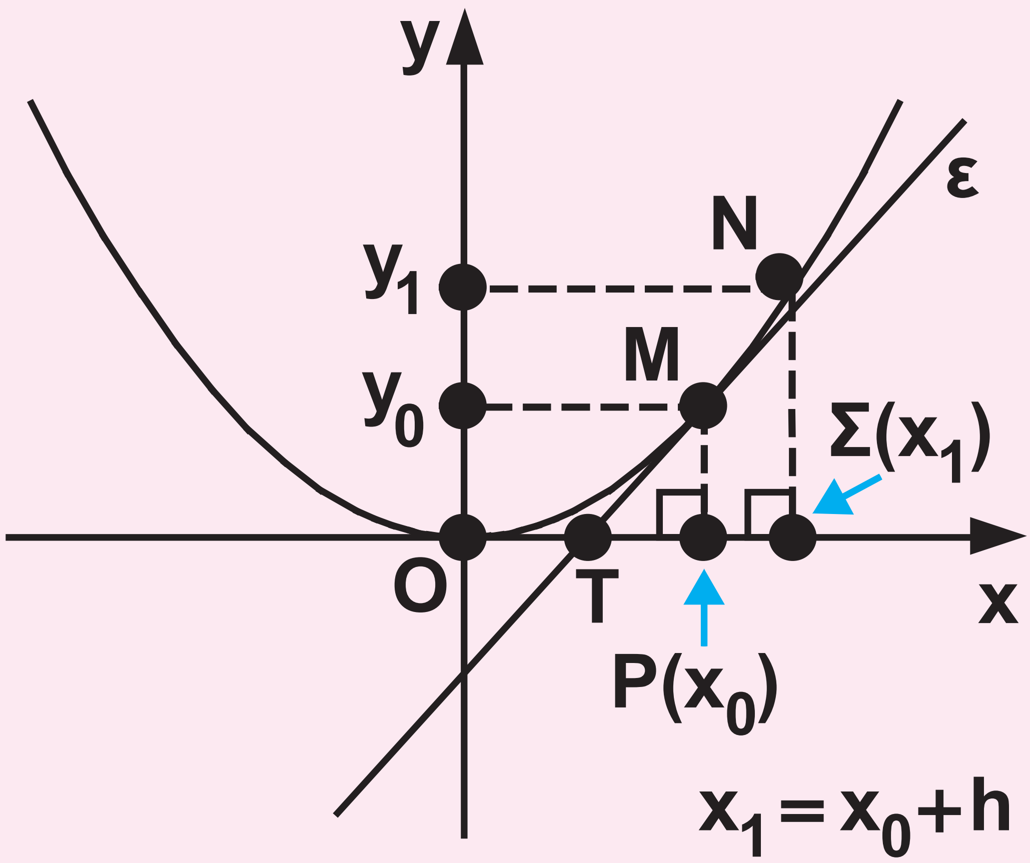
ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ
1. $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$	Α. $y = 2$
2. $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{e^x}$	Β. $y = x - 1$
3. $f(x) = 2 + \frac{3}{x-2}$	Γ. $y = -x + 1$
	Δ. $y = x$
	Ε. $y = -x$

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η έννοια της παραγώγου

Οι αρχαίοι Έλληνες ονόμαζαν εφαπτομένη μιας καμπύλης την ευθεία που έχει ένα μόνο κοινό σημείο μ’ αυτήν, χωρίς να την τέμνει και την κατασκεύαζαν με βάση γεωμετρικές ιδιότητες που απορρέουν απ’ αυτόν τον ορισμό. Έτσι ήταν γνωστός ο τρόπος κατασκευής εφαπτομένων στον κύκλο και τις κωνικές τομές (έλλειψη, παραβολή, υπερβολή). Επίσης, με προσφυγή σε κινηματικές μεθόδους, ο Αρχιμήδης είχε επινοήσει μέθοδο κατασκευής της εφαπτομένης μιας καμπύλης που είναι σήμερα γνωστή ως “έλικα του Αρχιμήδη”.

Η επόμενη εξέλιξη στο ζήτημα αυτό έγινε στις αρχές του 17ου αιώνα, όταν άρχισε η συστηματική εφαρμογή αλγεβρικών μεθόδων στη γεωμετρία. Το επόμενο παράδειγμα δείχνει τον τρόπο με τον οποίο η Άλγεβρα εφαρμόζεται στον προσδιορισμό της εφαπτομένης μιας παραβολής.



Έστω $y = f(x) = x^2$ η εξίσωση μιας παραβολής με κορυφή την αρχή των αξόνων και $M(x_0, y_0)$ ένα σημείο της, στο οποίο ζητείται να κατασκευαστεί μια εφαπτομένη ε. Η κατασκευή αυτή μπορεί να γίνει αν προσδιορίσουμε ένα άλλο χαρακτηριστικό σημείο της ε, όπως π.χ. το σημείο Τ στο οποίο τέμνει τον άξονα των τετμημένων. Θεωρούμε ένα άλλο σημείο της παραβολής, το $N(x_1, y_1)$, πολύ γειτονικό του Μ, τέτοιο ώστε $x_1 = x_0 + h$ (το h θεωρείται εδώ μια απειροελάχιστη μεταβολή του x_0). Στην περίπτωση αυτή τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΡΤ και ΝΣΤ μπορούν να θεωρηθούν κατά προσέγγιση όμοια και άρα θα ισχύει κατά προσέγγιση η αναλογία $\frac{ΝΣ}{ΜΡ} = \frac{ΣΤ}{ΤΡ}$. Αν θέσουμε $ΤΡ = s$, τότε διαδοχικά θα ισχύει:

$$\frac{y_1}{y_0} = \frac{s+h}{s} \quad ή \quad y_1 = y_0\left(1+\frac{h}{s}\right) \text{ ή}$$

$$y_1 - y_0 = y_0\frac{h}{s} \quad ή \quad \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{y_0}{s}. \qquad (1)$$

Το πρώτο μέλος αυτής της κατά προσέγγιση ισότητας γράφεται:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} =$$

$$=\frac{x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2}{h}=2x_0+h$$

και έτσι η (1) γίνεται $2x_0+h=\frac{y_0}{s}$.

Αν τώρα θέσουμε, όπως οι μαθηματικοί του 17ου αιώνα, $h=0$ βρίσκουμε από την τελευταία ότι $2x_0=\frac{y_0}{s}$ ή $s=\frac{y_0}{2x_0}$. Γνωρίζοντας λοιπόν το σημείο επαφής $M(x_0, y_0)$, προσδιορίζουμε από την τελευταία το μήκος $TP=s$ που μας δίνει αμέσως το σημείο T. Η ευθεία MT είναι η ζητούμενη εφαπτομένη της παραβολής. Η προηγούμενη διαδικασία ήταν ένας από τους δρόμους που οδήγησαν ιστορικά, στην έννοια της παραγώγου.

Κανόνες παραγώγισης

Στο δεύτερο μισό του 17ου αιώνα, οι μαθηματικοί είχαν κατορθώσει να μετασχηματίσουν όλη τη μακροσκελή διαδικασία παραγώγισης σε εφαρμογή ορισμένων κανόνων και τύπων, με τη βοήθεια κατάλληλα επιλεγμένων συμβόλων. Πρωτοπόροι προς αυτήν την κατεύθυνση υπήρξαν οι I. Newton και ο G. Leibniz. Ο Leibniz συμβόλιζε την απειροελάχιστη μεταβολή μιας ποσότητας x με dx (διαφορικό του x)˙ έτσι, π.χ. για τη συνάρτηση $y = x^2$ του προηγούμενου παραδείγματος, η αντίστοιχη μεταβολή του y (διαφορικό του y) ήταν:

$$dy = d(x^2) = (x + dx)^2 - x^2 = x^2 +$$
$$+ 2xdx + (dx)^2 - x^2 = 2xdx + (dx)^2.$$

Παραλείποντας την πολύ μικρή (συγκρινόμενη με τις άλλες) ποσότητα $(dx)^2$ προέκυπτε η $dy = 2xdx$ (εδώ η παράγωγος $2x$ ονομάζονταν "διαφορικός συντελεστής") και τελικά η $\frac{dy}{dx} = 2x$, ένας συμβολισμός που διατηρείται μέχρι σήμερα, χωρίς όμως να έχει νόημα πηλίκου. Με τον τρόπο αυτό ο Leibniz απέδειξε το 1677 τον κανόνα για τον υπολογισμό της μεταβολής του γινομένου δύο μεταβλητών x και y, που αποτελεί μια "πρωτόγονη" μορφή του σημερινού

κανόνα της παραγώγου ενός γινο-
μένου συναρτήσεων

$$d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy =$$
$$= xy + xdy + ydx + dxdy - xy =$$
$$= xdy + ydx + dxdy.$$

Παραλείποντας και εδώ την πολύ μικρή ποσότητα dxdy, παίρνουμε τη σχέση

$$d(xy) = xdy + ydx.$$

Με την εισαγωγή και καθιέρωση αυτών των κανόνων και συμβολισμών, η έννοια της παραγώγου εξελίχθηκε σ’ ένα εξαιρετικά αποτελεσματικό εργαλείο και

διεύρυνε σε μεγάλο βαθμό τις εφαρμογές της μαθηματικής ανάλυσης. Παράλληλα όμως, οι ασάφειες που επισημάναμε αποτελούσαν μια διαρκή πρόκληση για τους μαθηματικούς που αντιμετώπιζαν με κριτικό πνεύμα τα θεμέλια της επιστήμης τους. Ο πρώτος αυστηρός ορισμός αυτής της έννοιας, που στηρίζεται στην έννοια του ορίου, δόθηκε για πρώτη φορά το 1823 από τον A.L. Cauchy:

“ Όταν η συνάρτηση y = f(x) παραμένει συνεχής σ’ ένα διάστημα της μεταβλητής x και δοθεί σ’ αυτή τη μεταβλητή μια τιμή που ανήκει σ’ αυτό το διάστημα, τότε κάθε απειροελάχιστη αύξηση της μεταβλητής παράγει μια απειροελάχιστη αύξηση της συνάρτησης. Συνεπώς, αν τεθεί **Δx = i**, τότε οι δυο όροι του πηλίκου διαφορών

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

θα είναι απειροελάχιστες ποσότητες. Αλλά ενώ αυτοί οι δυο όροι θα προσεγγίζουν επ' άπειρον και ταυτόχρονα το όριο μηδέν, το πηλίκο μπορεί να συγκλίνει προς κάποιο άλλο όριο, θετικό ή αρνητικό. Αυτό το όριο, όταν υπάρχει έχει μια ορισμένη τιμή για κάθε συγκεκριμένο x, αλλά μεταβάλλεται μαζί με το x. Η μορφή της νέας συνάρτησης που θα εκφράζει το όριο του λόγου

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

θα εξαρτάται από τη μορφή της δοσμένης συνάρτησης $y=f(x)$. Για να ξεχωρίσουμε αυτήν την εξάρτηση, δίνουμε στη νέα συνάρτηση το όνομα **παράγωγος συνάρτηση** και τη συμβολίζουμε, με τη βοήθεια ενός τόνου, y' ή $f'(x)$”. **Με αφετηρία αυτόν τον ορισμό, ο Cauchy υπολόγισε τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων και απέδειξε τους κανόνες της παραγώγισης. Π.χ. για τον ιδιαίτερα σημαντικό κανόνα της παραγώγου μιας σύνθετης συνάρτησης, έδωσε την ακόλουθη απόδειξη:**

“Έστω z μια δεύτερη συνάρτηση του x, συνδεόμενη με την πρώτη $y = f(x)$ μέσω του τύπου $z = F(y)$. Η z ή $F[f(x)]$ είναι αυτή που ονομάζεται συνάρτηση μιας συνάρτησης της μεταβλητής x και αν οι απειροελάχιστες και ταυτόχρονες αυξήσεις των x, y και z συμβολιστούν με Δx, Δy, Δz αντίστοιχα, τότε θα είναι

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Από αυτήν, περνώντας στα όρια, έχουμε

$$\mathbf{z' = F'(y) \cdot y' = F'[f(x)] \cdot f'(x)\text{"}^{(*)}}$$

(*) **Ένα αδύνατο σημείο αυτής της απόδειξης, που αφορά την ισότητα (1), είναι ότι για μικρές, μη μηδενικές τιμές του Δx, μπορεί να ισχύει $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0$.**

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Β΄ ΜΕΡΟΣ (ΑΝΑΛΥΣΗ)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο:
Διαφορικός Λογισμός Σελ.